Estudio Analitico - Grafico de los Poliedros Arquimedianos

LAMINAS 38 AL 43

VII

Prof. T. Alvarez Peralto

Lámina 38	Poliedros arquimedianos Arquimediano VI $(1P_3 + 2P_4 + 1P_5)$	38

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el Arquimediano VI en el que en cada vértice concurren un triángulo equilátero, dos cuadrados y un pentágono regular.

La longitud de su lado es de 24.6 mm, y las coordenadas de su centro O, son (72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3 V y a escala 1:1.

DATOS $O\ (72,\ 72,\ 85)$ mm

$l_{VI} = 24.6$ mm

21-3-73

CONSIDERACIONES PREVIAS

Seguiremos en el estudio de este arquimediano, las directrices y fórmulas generales planteadas en el estudio del "Arquimediano I", lámina 33.

En el caso particular que nos ocupa, determinaremos las magnitudes siguientes:

l = Arista del arquimediano VI (dato del ejercicio)

a = Radio de la esfera circunscrita.

b = Radio de la esfera tangente a las aristas.

c_3 = Radio de la esfera tangente a las caras triangulares.

c_4 = Radio de la esfera tangente a las caras cuadradas.

c_5 = Radio de la esfera tangente a las caras pentagonales.

d_3 = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara triangular

d_4 = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara cuadrada.

d_5 = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara pentagonal.

m = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las aristas de un ángulo sólido.

α_3 = Ángulo rectilíneo del diedro formado por una cara triangular, con el plano diametral del arquimedia-

no, que pasa por una arista de aquélla.

α_4 = Angulo rectilineo del ~~del~~ diedro formado por una cara cuadrada, con el plano diametral del arquimediano, que pasa por una arista de aquélla.

α_5 = Angulo rectilineo del diedro formado por una cara pentagonal, con el plano diametral del arquimediano, que pasa por una arista de aquélla.

φ_{3-4} = Angulo rectilineo del diedro formado por una cara triangular y otra cuadrada

φ_{4-5} = Angulo rectilineo del diedro formado por una cara cuadrada y otra pentagonal.

S = Superficie

V = Volumen

PROCESO GRÁFICO - ANALÍTICO

El estudio realizado de este arquimediano, nos indica que se compone de 20 caras triangulares, 30 caras cuadradas y 12 pentagonales, todas regulares; 60 vértices y 120 aristas.

En cada vértice concurren, un triángulo; dos cuadrados y un pentágono, en el orden siguiente $P_3 - P_4 - P_5 - P_4$, es decir, las caras cuadradas no son consecutivas; por consiguiente concurrirán también 4 aristas del arquimediano.

Así pues, tendremos que

ARQUIMEDIANO VI $(1P_3 + 2P_4 + 1P_5)$; $C_3 = 20$; $C_4 = 30$; $C_5 = 12$; $V = 60$; $A = 120$

Cálculo de sus magnitudes

Arista "l" del arquimediano

Dato del ejercicio

Radio "m" de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las cuatro aristas que concurren en un ángulo sólido.

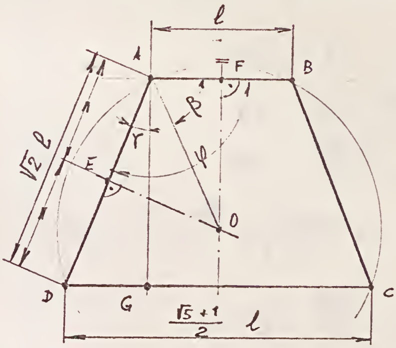


Figura 1

Este polígono es un trapecio A-B-C-D (fig. 1) isósceles, cuya base menor AB es el lado "l" del arquimediano (lado de la cara triangular); la base mayor DC es la diagonal de la cara pentagonal de lado "l"; los lados no paralelos AD y BC, ambos iguales, son a su vez las diagonales de las dos caras cuadradas.

Por Geometría se sabe que la diagonal de un cuadrado de lado "l", es $AD = BC = \sqrt{2}\,l$,

y que la diagonal de un pentágono regular, de lado "l", es

$$DC = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\, l$$

Si en la figura 1, trazamos por E y F, puntos medios de los lados AD y AB, perpendiculares a estos lados, ambas se cortarán en O, centro de la circunferencia circunscrita al trapecio isósceles A-B-C-D; uniendo O con A, el segmento OA será el radio "m" de dicha circunferencia. Tracemos también por A, la perpendicular al lado DC, cuyo pie G nos determina el triángulo rectángulo A-D-G, recto en G.

De la figura se deduce:

$$AB = l \qquad [1]$$

$$AD = BC = \sqrt{2}\, l \qquad [2]$$

$$DC = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\, l \qquad [3]$$

$$DG = \frac{DC - AB}{2} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\, l - l\right) : 2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} - 1\right) l =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, l = \frac{\sqrt{5}-1}{4}\, l \qquad [4]$$

de [3] y [2] se deduce

$$\boxed{\operatorname{sen} \gamma} = \frac{DG}{DA} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}\, l : \sqrt{2}\, l = \frac{\sqrt{5}-1}{4\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{8}} \qquad [5]$$

y siendo. $\varphi = \gamma + \frac{\pi}{2}$ será $\cos \varphi = -\operatorname{sen} \gamma$, por lo que

$$\boxed{\cos \varphi} = -\operatorname{sen} \varphi = -\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{8} = \boxed{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{10}}{8}} \quad \text{y por lo tanto} \qquad [6]$$

[illegible]

$$\boxed{\operatorname{sen}\varphi} = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{10}}{8}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{2+10-2\sqrt{20}}{64}} = \sqrt{\frac{64-12+4\sqrt{5}}{64}} =$$

$$= \sqrt{\frac{52+4\sqrt{5}}{64}} = \sqrt{\frac{13+\sqrt{5}}{16}} = \boxed{\frac{\sqrt{13+\sqrt{5}}}{4}} \qquad [7]$$

De la figura se deduce:

$$AO = \boxed{m} = \frac{AF}{\cos\beta} = \boxed{\frac{l}{2\cos\beta}} \quad \text{y también} \qquad [8]$$

$$AO = \boxed{m} = \frac{AE}{\cos(\varphi-\beta)} = \boxed{\frac{\sqrt{2}\,l}{2\cos(\varphi-\beta)}} \qquad [9]$$

De [8] y [9]

$$\frac{l}{2\cos\beta} = \frac{\sqrt{2}\,l}{2\cos(\varphi-\beta)} \quad '' \quad \cos(\varphi-\beta) = \sqrt{2}\cos\beta \quad ''$$

$$\cos\varphi\cos\beta - \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\beta = \sqrt{2}\cos\beta \quad ''$$

$$\cos\varphi\cos\beta - \operatorname{sen}\varphi\sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{2}\cos\beta \quad '' \qquad [10]$$

si hacemos en [10] $\cos\beta = x$; $\cos\varphi = p$; $\operatorname{sen}\varphi = q$

tendremos:

$$px - q\sqrt{1-x^2} = \sqrt{2}\,x \quad '' \quad (p-\sqrt{2})x = q\sqrt{1-x^2} \quad ''$$

$$p-\sqrt{2} = q\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}} \quad '' \quad \frac{p-\sqrt{2}}{q} = \sqrt{\frac{1}{x^2}-1} \quad '' \quad \left(\frac{p-\sqrt{2}}{q}\right)^2 = \frac{1}{x^2}-1$$

$$\left(\frac{p-\sqrt{2}}{q}\right)^2 + 1 = \frac{1}{x^2} \quad '' \quad x^2 = \frac{1}{\left(\frac{p-\sqrt{2}}{q}\right)^2+1} \quad '' \quad \text{y de aquí:}$$

$$x = \cos\beta = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{p-\sqrt{2}}{q}\right)^2 + 1}} \qquad [11]$$

valor que sustituido en [8] nos da

$$\boxed{m} = \frac{l}{2\cos\beta} = \frac{l}{2\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{p-\sqrt{2}}{q}\right)^2+1}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{\left(\frac{p-\sqrt{2}}{q}\right)^2+1}}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\frac{p-\sqrt{2}}{q}\right)^2+1}{4}} \times l = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{p-\sqrt{2}}{q}\right)^2+1} \times l} \qquad [12]$$

sustituyendo en [12] el valor de $p = \cos\varphi = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{10}}{8}$, obtenido en [6], y el de $q = \operatorname{sen}\varphi = \frac{\sqrt{13+\sqrt{5}}}{4}$ obtenido en [7], tendremos finalmente:

$$\boxed{m} = \frac{1}{2}\sqrt{\left[\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{10}}{8} - \sqrt{2}\right) : \frac{\sqrt{13+\sqrt{5}}}{4}\right]^2 + 1} \times l =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{\sqrt{2}-\sqrt{10}-8\sqrt{2}}{8} : \frac{\sqrt{13+\sqrt{5}}}{4}\right]^2+1} \times l = \frac{1}{2}\sqrt{\left(-\frac{7\sqrt{2}+\sqrt{10}}{8} : \frac{\sqrt{13+\sqrt{5}}}{4}\right)^2+1} \times l$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(-\frac{7\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2\sqrt{13+\sqrt{5}}}\right)^2+1} \times l = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(7\sqrt{2}+\sqrt{10})^2}{4(13+\sqrt{5})}+1} \times l =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{98+10+14\sqrt{20}}{4(13+\sqrt{5})}+1} \times l = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{108+28\sqrt{5}}{4(13+\sqrt{5})}+1} \times l =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{27+7\sqrt{5}}{13+\sqrt{5}}+1}\times l = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{27+7\sqrt{5}+13+\sqrt{5}}{13+\sqrt{5}}}\,l = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{40+8\sqrt{5}}{13+\sqrt{5}}}\times l =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\,(5+\sqrt{5})}{13+\sqrt{5}}}\times l = \sqrt{\frac{2\,(5+\sqrt{5})}{13+\sqrt{5}}}\times l = \sqrt{\frac{2\,(5+\sqrt{5})\,(13-\sqrt{5})}{13^2-5}}\times l =$$

$$= \sqrt{\frac{2\,(65+13\sqrt{5}-5\sqrt{5}-5)}{164}}\times l = \sqrt{\frac{60+8\sqrt{5}}{82}}\times l = \boxed{\sqrt{\frac{30+4\sqrt{5}}{41}}\times l} =$$

$$= 0{,}97\ 46\ 07\ 76\ldots\ l$$

Radio "a" de la esfera circunscrita

Se obtiene aplicando la fórmula general [1] (ver lám. 33), a este caso particular

$$\boxed{a} = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2-m^2}} = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2-\left(\sqrt{\frac{30+4\sqrt{5}}{41}}\,l\right)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{30+4\sqrt{5}}{41}}}\times l =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{41-30-4\sqrt{5}}{41}}}\times l = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{41}{11-4\sqrt{5}}}\times l = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{41\,(11+4\sqrt{5})}{11^2-16\times 5}}\,l =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{41\,(11+4\sqrt{5})}{41}}\,l = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{11+4\sqrt{5}}\times l} = 2{,}23\ 29\ 50\ 5\ldots\ l$$

Para el caso del dibujo, $a = 55{,}0$ mm, de donde

$l = 24{,}631$ mm.

Radio "b" de la esfera tangente a las aristas.

Aplicando la fórmula general [3] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{b} = \sqrt{a^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{11+4\sqrt{5}} \times l\right)^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{11+4\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{10+4\sqrt{5}}{4}}\, l = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{10+4\sqrt{5}} \times l} = 2.17\,62\,50\,90\ldots\, l$$

(en dibujo: $b = 53.6$ mm)

Radio "d_3" de la circunferencia circunscrita a una cara triangular de lado "l"

Se demuestra en Geometría, es

$$\boxed{d_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}\, l} = 0,57\,73\,50\cdot 27\ldots\, l$$

(en dibujo: $d_3 = 14.2$ mm)

Radio "d_4" de la circunferencia circunscrita a una cara cuadrada de lado "l"

Se demuestra en Geometría, es

$$\boxed{d_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}\, l} = 0.70\,71\,06\,78\ldots\, l$$

(en dibujo: $d_4 = 17.4$ mm).

Radio "d_5" de la circunferencia circunscrita a una cara pentagonal regular de lado "l"

UNE A4 210 X 297

Se demuestra en Geometría, es

$$\boxed{d_5 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, \ell} = 0{,}85\ 06\ 50\ 8 \ldots \ell$$

(en dibujo: $d_5 = 21{,}0$ mm)

<u>Radio "c_3" de la esfera tangente a las caras triangulares regulares de lado "ℓ"</u>

Aplicando la fórmula general [2] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{c_3} = \sqrt{a^2-(d_3)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{11+4\sqrt{5}}\,\ell\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\ell\right)^2} = \sqrt{\frac{11+4\sqrt{5}}{4}-\frac{1}{3}}\cdot \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{33+12\sqrt{5}-4}{12}}\cdot \ell = \sqrt{\frac{29+12\sqrt{5}}{12}}\,\ell = \frac{\sqrt{29+12\sqrt{5}}}{2\sqrt{3}}\,\ell = \frac{\sqrt{\frac{40}{2}}+\sqrt{\frac{18}{2}}}{2\sqrt{3}}\,\ell =$$

$$= \frac{\sqrt{20}+\sqrt{9}}{2\sqrt{3}}\,\ell = \frac{2\sqrt{5}+3}{2\sqrt{3}}\,\ell = \boxed{\frac{2\sqrt{15}+3\sqrt{3}}{6}\,\ell} = 2{,}15\ 70\ 19\ 85 \ldots \ell$$

(en dibujo: 53,1 mm.)

<u>Radio "c_4" de la esfera tangente a las caras cuadradas de lado "ℓ"</u>

Aplicando la fórmula general [2] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{c_4} = \sqrt{a^2-(d_4)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{11+4\sqrt{5}}\,\ell\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell\right)^2} = \sqrt{\frac{11+4\sqrt{5}}{4}-\frac{2}{4}}\cdot \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{9+4\sqrt{5}}{4}}\cdot \ell = \frac{1}{2}\sqrt{9+4\sqrt{5}}\,\ell = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{10}{2}}+\sqrt{\frac{8}{2}}\right)\ell = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+2\right)\ell =$$

UNE A4 210 X 297

$$= \boxed{\left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \ell} = 2,11\ 80\ 33\ 99\ldots\ \ell$$

(en dibujo: $c_4 = 52,2$ mm)

Radio "c_5" de la esfera tangente a las caras pentagonales regulares de lado "ℓ"

Aplicando la fórmula general [2], (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{c_5} = \sqrt{a^2 - (d_5)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{11 + 4\sqrt{5}}\ \ell\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ \ell\right)^2} = \sqrt{\frac{11 + 4\sqrt{5}}{4} - \frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{55 + 20\sqrt{5} - 10 - 2\sqrt{5}}{20}} \times \ell = \sqrt{\frac{45 + 18\sqrt{5}}{20}}\ \ell = \sqrt{\frac{9(5 + 2\sqrt{5})}{20}}\ \ell = \boxed{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}\ \ell} =$$

$= 2,06\ 45\ 72\ 9\ldots\ \ell$ (en dibujo: $c_5 = 50,8$ mm)

Angulo rectilineo "α_3" del diedro formado por una cara triangular, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.

Se obtiene, en función de su tangente, por la fórmula general [5] (ver lám. 33)

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha_3} = \frac{2\ c_3}{\sqrt{4\,(d_3)^2 - \ell^2}} = \frac{2 \times \frac{2\sqrt{15} + 3\sqrt{3}}{6}\ \ell}{\sqrt{4\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\ell\right)^2 - \ell^2}} = \frac{2\sqrt{15} + 3\sqrt{3}}{3\sqrt{4 \times \frac{1}{3} - 1}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{15} + 3\sqrt{3}}{3 \times \sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{2\sqrt{15} + 3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{45} + 9}{3} = \frac{6\sqrt{5} + 9}{3} = \boxed{2\sqrt{5} + 3} =$$

$= 7,47\ 21\ 35\ 95 \ldots$

$\lg \operatorname{tg} \alpha_3 = 0,87\ 34\ 44\ 8$ $\boxed{\alpha_3 = 82^\circ\ 22'\ 38.5''}$

Angulo rectilíneo "α_4" del diedro formado por una cara cuadrada, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquilla.

Se obtiene, en función de su tangente, por la fórmula general [6] (ver lám. 33)

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha_4} = \frac{2\, c_4}{\sqrt{4\,(d_4)^2 - \ell^2}} = \frac{2 \times \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \ell}{\sqrt{4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\ell\right)^2 - \ell^2}} = \frac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{4 \times \frac{2}{4} - 1}} = \boxed{2 + \sqrt{5}} =$$

$= 4,23\ 60\ 67\ 98 \ldots$

$\lg 4,23\ 60\ 67\ 98 \ldots = 0,62\ 69\ 62\ 9$ $\boxed{\alpha_4 = 76^\circ\ 43'\ 2,9''}$

Angulo rectilíneo "α_5" del diedro formado por una cara pentagonal regular, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquilla.

Se obtiene, en función de su tangente, por la fórmula general [6] (ver lám. 33)

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha_5} = \frac{2\, c_5}{\sqrt{4\,(d_5)^2 - \ell^2}} = \frac{2 \times \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}\ \ell}{\sqrt{4\left(\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}\,\ell\right)^2 - \ell^2}} = \frac{3\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}}{\sqrt{4 \times \frac{5 + \sqrt{5}}{10} - 1}} =$$

$$= \frac{3\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}}{\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}-1}} = \frac{3\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}}{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}} = \boxed{3}$$

$\lg \operatorname{tg} \alpha_5 = 0,47\ 71\ 21\ 3\ldots$ $\boxed{\alpha_5 = 71°\ 33'\ 54.2''}$

<u>Angulo rectilíneo φ_{3-4} del diedro formado por una cara triangular regular y una cuadrada</u>

Aplicando la fórmula general [4] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{\varphi_{3-4}} = \alpha_3 + \alpha_4 = 82°\ 22'\ 38,5'' + 76°\ 43'\ 2,9'' =$$

$$= \boxed{159°\ 5'\ 41,4''}$$

<u>Angulo rectilíneo φ_{4-5} del diedro formado por una cara cuadrada y una pentagonal regular.</u>

Aplicando la fórmula general [4] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{\varphi_{4-5}} = \alpha_4 + \alpha_5 = 76°\ 43'\ 2,9'' + 71°\ 33'\ 54.2'' =$$

$$= \boxed{148°\ 16'\ 57.1''}$$

<u>Area lateral "S" del arquimediano</u>

Se compone de la suma de 20 caras triangulares re-

gulares, 30 caras cuadradas y 12 caras pentagonales regulares, todas de lado "ℓ"; la superficie será pues:

$$\boxed{S} = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2 + 30\ell^2 + 12 \times \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}\ell^2 = \boxed{\left(5\sqrt{3} + 30 + 3\sqrt{25+10\sqrt{5}}\right)\times \ell^2}$$

$$= (8,66\,02\,54\,1 + 30 + 20,64\,57\,28\,8)\ell^2 = 59,30\,59\,82\,9\ldots\ \ell^2$$

<u>Volumen "V" del arquimediano</u>

Se compone de la suma de 20 pirámides de base triangular regular y altura "c_3"; de 30 pirámides de base cuadrada y altura "c_4"; y finalmente de 12 pirámides de base pentagonal regular y altura "c_5"; su volumen será pues:

$$\boxed{V} = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2 \times \frac{c_3}{3} + 30\ell^2 \times \frac{c_4}{3} + 12 \times \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}\ell^2 \times \frac{c_5}{3} =$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{3}\ell^2 \times \frac{2\sqrt{15}+3\sqrt{3}}{6}\ell + 10\ell^2 \times \left(1+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\ell + \sqrt{25+10\sqrt{5}}\,\ell^2 \times \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\,\ell =$$

$$= \frac{5}{18}\left(2\sqrt{45}+9\right)\ell^3 + \left(10+5\sqrt{5}\right)\ell^3 + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\times\left(25+10\sqrt{5}\right)}\ \ell^3 =$$

$$= \frac{5}{6}\left(2\sqrt{5}+3\right)\ell^3 + \left(10+5\sqrt{5}\right)\ell^3 + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\times\left(5+2\sqrt{5}\right)\times 5}\ \ell^3 =$$

$$= \frac{5}{6}\left(2\sqrt{5}+3\right)\ell^3 + \left(10+5\sqrt{5}\right)\ell^3 + \frac{3}{2}\times\left(5+2\sqrt{5}\right)\ell^3 =$$

$$= \frac{5\left(2\sqrt{5}+3\right) + 6\times\left(10+5\sqrt{5}\right) + 9\left(5+2\sqrt{5}\right)}{6}\ell^3 = \frac{10\sqrt{5}+15+60+30\sqrt{5}+45+18\sqrt{5}}{6}\ell^3 =$$

$$= \frac{120 + 58\sqrt{5}}{6}\, l^3 = \boxed{\left(20 + \frac{29\sqrt{5}}{3}\right) l^3} = 41{,}61\,53\,23\,78\ldots\, l^3$$

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de 20 triángulos equiláteros, de lado 24,6 mm; de 30 cuadrados y 12 pentágonos regulares también de igual lado. El acoplamiento deberá hacerse de forma que en cada vértice concurran 1 triángulo, 2 cuadrados y 1 en pentágono, estando alternados los cuadrados. ($P_3 - P_4 - P_5 - P_4$).

En el cuadro sinóptico que damos a continuación, resumimos los resultados analíticos obtenidos anteriormente.

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{1}{2}\sqrt{11+4\sqrt{5}}\ \ell$	$2{,}23\ 29\ 51\ldots\ \ell$
b	$\frac{1}{2}\sqrt{10+4\sqrt{5}}\ \ell$	$2{,}17\ 62\ 51\ldots\ \ell$
c_3	$\frac{2\sqrt{15}+3\sqrt{3}}{6}\ \ell$	$2{.}15\ 70\ 20\ldots\ \ell$
c_4	$1+\frac{\sqrt{5}}{2}\ \ell$	$2{,}11\ 80\ 34\ldots\ \ell$
c_5	$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\ \ell$	$2{,}06\ 45\ 73\ldots\ \ell$
d_3	$\frac{\sqrt{3}}{3}\ \ell$	$0{,}57\ 73\ 50\ldots\ \ell$
d_4	$\frac{\sqrt{2}}{2}\ \ell$	$0{,}70\ 71\ 07\ldots\ \ell$
d_5	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ \ell$	$0{,}85\ 06\ 57\ldots\ \ell$
m	$\sqrt{\frac{30+4\sqrt{5}}{41}}\ \ell$	$0{,}97\ 46\ 08\ldots\ \ell$
α_3	$tg\ \alpha_3 = 2\sqrt{5}+3$	$tg.\ \alpha_3 = 7{,}47\ 21\ 36\ldots$ $\alpha_3 = 82°\ 22'\ 38{,}5''$
α_4	$tg\ \alpha_4 = 2+\sqrt{5}$	$tg\ \alpha_4 = 4{,}23\ 60\ 68\ldots$ $\alpha_4 = 76°\ 43'\ 2{,}9''$
α_5	$tg\ \alpha_5 = 3$	$tg\ \alpha_5 = 3$ $\alpha_5 = 71°\ 33'\ 54{.}2''$
φ_{3-4}	$tg\ \varphi_{3-4} = -\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ *	$tg\ \varphi_{3-4} = -0{,}38\ 19\ 66\ldots$ $\varphi_{34} = 159°\ 5'\ 41{,}4''$
φ_{4-5}	$tg\ \varphi_{4-5} = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ **	$tg\ \varphi_{4-10} = -0{\cdot}61\ 80\ 34\ldots$ $\varphi_{4-5} = 148°\ 16'\ 57{,}1''$
S	$(5\sqrt{3}+30+3\sqrt{25+10\sqrt{5}})\ \ell^2$	$59{,}30\ 59\ 83\ldots\ \ell^2$
V	$(20+\frac{29\sqrt{5}}{3})\ \ell^3$	$41{,}61\ 53\ 24\ldots\ \ell^3$

* Ver cálculo Lám. 44, hoja 12 (reverso)

** Ver cálculo Lám. 44, hoja 14 (reverso)

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

Después del cálculo de las magnitudes principales, vamos a proceder en la lámina 38, a la representación gráfica del arquimediano VI.

Para su trazado nos valdremos de cotas calculadas por las fórmulas anteriores, de procesos gráficos y de cotas complementarias cuyo cálculo efectuaremos posteriormente. Todas las magnitudes las obtendremos en función del lado "l_{VI}" del arquimediano, cuya longitud es de 24,6 mm.

Calculemos previamente las siguientes magnitudes:

l_{VI}	=	Dato del ejercicio	= 24.6	mm
a	=	2,23 29 51... x 24.6	= 55,0	mm
b	=	2,17 62 51... x 24,6	= 53,6	mm
c_3	=	2,15 70 20... x 24.6	= 53,1	mm
c_4	=	2,11 80 34... x 24,6	= 52,2	mm
c_5	=	2,06 45 73... x 24,6	= 50,8	mm
d_3	=	0,57 73 50... x 24,6	= 14,2	mm
d_4	=	0,70 71 07... x 24,6	= 17,4	mm
d_5	=	0,85 06 51... x 24,6	= 21,0	mm

Antes de proceder al trazado gráfico, observemos en la lámina 38 que la proyección del arquimediano, en el plano II, presenta una forma muy regular que permite obtener directamente dicha proyección.

Las propiedades geométricas de ella son:

1) Las caras 1 al 5 y 56 al 60, son pentágonos regulares de vértices alternados, centro en O y lado "l".

2) Los vértices 6 al 15 y 46 al 55 son vértices de un decágono regular de centro en O y lado "l"

3) Los vértices 26 al 35 son vértices de un decágono regular de cuyo lado y radio de su circunferencia circunscrita calcularemos posteriormente.

Teniendo presente lo expuesto, el orden de operaciones del trazado gráfico (lám. 38), es el siguiente:

1º Situar el centro O, de coordenadas 72, 72, 85 mm

2º Dibujar en I, II y III las proyecciones de la esfera circunscrita, de radio 55 mm.

3º Representar en I, II y III las caras pentagonales opuestas 1 al 5 y 56 al 60, supuesto el poliedro colocado con dichas caras paralelas a II y uno de sus lados (3-4 en la superior, y 59-60 en la inferior) perpendicular a I (utilícese la cota "c_5" en I y III, y la "d_5" en II).

4º Representar en II los vértices 6 al 15 y 46 al 55, que son a su vez los de un decágono regular de centro en O, y lado "l" (utilícese el radio r_1), con la mitad de sus lados paralelos a los de los pentágonos 1 al 5 y 56 al 60.

5º Representar en II los vértices 26 al 35 que son a

su vez los de un decágono regular de centro en O y radio "r_3" (sensiblemente igual al "a"), colocándo sus lados perpendiculares a las bisectrices de los ángulos del decágono 6 al 15 ya trazado.

Con las operaciones 3ª a 5ª quedan representados en II todos los vértices del arquimediano que se numerarán y unirán entre sí en el orden que se indica en la lámina. Para obtener en I las proyecciones de los vértices que faltan (ya hemos situados los 1 al 5 y 56 al 60), bastará determinar previamente las alturas a que se encuentran con respecto al centro O; dichas alturas vienen dadas por las magnitudes "f_1", "f_2" y "f_3", o por las "g_1", "g_2" y "g_3", cuyos valores obtendremos posteriormente; trazando rectas paralelas a I y II, a las distancias anteriores, puede completarse fácilmente la proyección total en I, valiéndose de las proyecciones en II.

Conocidas las proyecciones en I y II, la de la III es inmediata y no necesita esplicación.

Como comprobación y necesaria ayuda para el trazado gráfico dado anteriormente, vamos a determinar analíticamente las siguientes magnitudes complementarias que darán mayor exactitud a dicho trazado.

<u>Altura "n" de una cara triangular</u>

Se demuestra en Geometría es

$$\boxed{n = \frac{\sqrt{3}}{2}\ l} = 0,86\ 60\ 25\ 4 \ldots\ l$$

Apotema "k" de una cara pentagonal

Se demuestra en Geometría es (ver lám. 4. fórm. 39)

$$\boxed{k = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{20}}\ l} = 0,68\ 81\ 91\ 0 \ldots\ l$$

Distancia "g_1" de los vértices 6 al 15 al plano de la cara pentagonal 1 al 5, y de los vértices 46 al 55 a la cara pentagonal 56 al 60.

Considerando en I la cara pentagonal 1 al 5 y la contigua cuadrada 3-4-12-13, que forman entre sí el ángulo φ_{4-5}, ya conocido, y cuyos respectivos planos son perpendiculares a I, se deduce que la altura "g_1" buscada es la proyección sobre III del eje de la cara cuadrada, siendo el ángulo de proyección

$\varphi_{4-5} - 90° = 148°\ 16'\ 57,1'' - 90° = 58°\ 16'\ 57,1''$ de donde

$g_1 = \cos 58°\ 16'\ 57,1'' \times l = 0,52\ 57\ 31\ 1 \ldots\ l$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$lg.\ \cos 58°\ 16'\ 57{,}1'' = \bar{1},72\ 07\ 63\ 7 = lg\ 0{,}52\ 57\ 31\ 1 \ldots$$

$$\boxed{\cos 58°\ 16'\ 57{,}1'' = 0{,}52\ 57\ 31\ 1 \ldots}$$

Este valor se puede obtener exactamente, mediante el cálculo trigonométrico de los ángulos que intervienen, cuyos valores hemos deducido anteriormente, y cuyo cálculo desarrollamos a continuación.

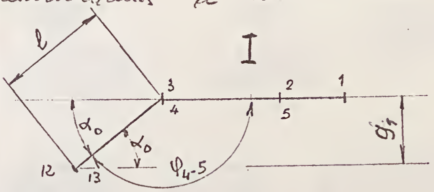


Figura 2

Sea (fig. 2) la proyección parcial en I del arquimediano VI, que comprende la cara pentagonal 1 al 5 y la contigua cuadrada 3-4-12-13 que forman entre sí el ángulo φ_{4-5}, siendo α_0 el ángulo suplementario del φ_{4-5}. La magnitud de la cota "g_1" buscada, será pues

$$g_1 = l \operatorname{sen} \alpha_0 \qquad [1]$$

pero siendo $\varphi_{4-5} = \alpha_4 + \alpha_5$ y $tg\ \alpha_4 = 2+\sqrt{5}$; $tg\ \alpha_5 = 3$

tendremos $$tg\ \varphi_{4-5} = tg\,(\alpha_4+\alpha_5) = \frac{tg\ \alpha_4 + tg\ \alpha_5}{1 - tg\ \alpha_4\ tg\ \alpha_5} = \frac{(2+\sqrt{5})+3}{1-(2+\sqrt{5})\times 3} =$$

$$= \frac{5+\sqrt{5}}{1-6-3\sqrt{5}} = \frac{5+\sqrt{5}}{-5-3\sqrt{5}} = -\frac{5+\sqrt{5}}{5+3\sqrt{5}} = -\frac{(5+\sqrt{5})(3\sqrt{5}-5)}{45-25} = -\frac{15\sqrt{5}+15-25-5\sqrt{5}}{20} =$$

$$= -\frac{10\sqrt{5}-10}{20} = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$ y de aquí se deduce, siendo

$\alpha_0 = \pi - \varphi_{4-5}$ y por lo tanto $tg\, \alpha_0 = -\, tg\, \varphi_{4-5}$, que

$tg\, \alpha_0 = -\left(-\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ y por consiguiente

$$\boxed{sen\, \alpha_0} = \frac{tg\, \alpha_0}{\sqrt{1 + tg^2\, \alpha_0}} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\sqrt{1+\frac{5+1-2\sqrt{5}}{4}}} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\sqrt{1+\frac{3-\sqrt{5}}{2}}} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 : \frac{5-\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{5+1-2\sqrt{5}}{4} : \frac{10-2\sqrt{5}}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{10-2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{25-5}} = \sqrt{\frac{15-5\sqrt{5}+3\sqrt{5}-5}{20}} =$$

$$= \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{20}} = \boxed{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}}$$ valor que sustituido en [1], nos da

$$\boxed{g_1 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times l} = 0{,}52\ 57\ 31\ 1\ldots\ l$$

cuyo valor numérico aproximado es coincidente con el obtenido anteriormente.

Para el caso del dibujo, será: $g_1 = 0{,}52\ 57\ 31\ 1.. \times 24{,}63 = 12{,}9$ m m.

<u>Distancia "f_1" entre los dos planos paralelos a II, que contienen los vértices 6 al 15 y 46 al 55 respectivamente</u>

Se obtiene por diferencia de las alturas "c_5" y "g_1", ya calculadas.

Se puede simplificar más

$$\boxed{f_1} = 2\left(c_5 - g_1\right) = 2 \times \left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} - \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)\cdot \ell = \boxed{\left(3\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} - 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)\ell} =$$

$$= 2 \times \left(2{,}06\,45\,72\,9\ldots - 0{,}52\,57\,31\,1\ldots\right)\ell = 3{,}07\,76\,83\,6\ldots\,\ell$$

Para el caso del dibujo, será: $f_1 = 3{,}07\,76\,83\,6\ldots \times 24{,}63 = 75{,}8$

(véase simplificación al dorso

Radio "r_1" de la circunferencia circunscrita al decágono regular de lado "ℓ" y vértices 6 al 15 (ó 46 al 55)

Se demuestra en Geometría, es

$$\boxed{r_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\,\ell} = 1{,}61\,80\,33\,99\ldots\,\ell$$

Este mismo valor se puede deducir de los ya calculados anteriormente, considerando que "r_1" es un cateto de un triángulo rectángulo de hipotenusa "a" y el otro cateto "$\frac{f_1}{2}$". Su valor será:

$$\boxed{r_1} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{f_1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{11+4\sqrt{5}}}{2}\,\ell\right)^2 - \left[\frac{3\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} - 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}}{2}\times \ell\right]^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{11+4\sqrt{5}}{4} - \frac{9\times\frac{5+2\sqrt{5}}{5} + 4\times\frac{5-\sqrt{5}}{10} - 12\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\times\frac{5-\sqrt{5}}{10}}}{4}}\times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{11+4\sqrt{5}}{4} - \left(\frac{45+18\sqrt{5}}{20} + \frac{5-\sqrt{5}}{10} - 3\sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{50}}\right)}\times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{11+4\sqrt{5}}{4} - \frac{45+18\sqrt{5}}{20} - \frac{5-\sqrt{5}}{10} + \frac{3}{5}\sqrt{\frac{25+10\sqrt{5}-5\sqrt{5}-10}{2}}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{55+20\sqrt{5}}{20} - \frac{45+18\sqrt{5}}{20} - \frac{10-2\sqrt{5}}{20} + \frac{3}{5}\sqrt{\frac{15+5\sqrt{5}}{2}}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{55+20\sqrt{5}-45-18\sqrt{5}-10+2\sqrt{5}}{20} + \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{5(3+\sqrt{5})}}{\sqrt{2}}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{4\sqrt{5}}{20} + \frac{3}{5} \times \sqrt{\frac{5}{2}} \times \left(\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)} \times l = \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{3}{5} \times \left(\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{10}} \times l = \sqrt{\frac{2\sqrt{5}+15+3\sqrt{5}}{10}} \times l = \sqrt{\frac{5\sqrt{5}+15}{10}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{5}+3}{2}}\, l = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}\, l = \frac{\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \times l = \boxed{\frac{\sqrt{5}+1}{2} \times l}$$

valor coincidente con el del radio de la circunferencia circunscrita al decágono regular de lado "l" que, como indicamos al principio, se demuestra en Geometría.

Para el caso del dibujo, será: $r_1 = 1,61\,80\,34... \times 24,63 = 39,9$ mm.

<u>Distancia "g_2" de los vértices 16 al 25 al plano de la cara pentagonal 1 al 5, y de los vértices 36 al 45 a la cara pentagonal 56 al 60</u>

Refiriéndonos a la lámina 38, vemos que la cara pentagonal 12-13-24-30-23, contigua a la cuadrada 3-4-13-12, están proyectadas ambas sobre I, según líneas rectas,

$$\left(3\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} - 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right) l = \sqrt{\left(3\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} - 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)^2} \times l =$$

$$= \sqrt{9 \times \frac{5+2\sqrt{5}}{5} + 4 \times \frac{5-\sqrt{5}}{10} - 12\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5-\sqrt{5}}{10}}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{45+18\sqrt{5}}{5} + \frac{10-2\sqrt{5}}{5} - 12\sqrt{\frac{25+10\sqrt{5}-5\sqrt{5}-10}{50}}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{45+18\sqrt{5}+10-2\sqrt{5}}{5} - 12\sqrt{\frac{15+5\sqrt{5}}{50}}} \times l = \sqrt{\frac{55+16\sqrt{5}}{5} - 12\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{10}}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{55+16\sqrt{5}}{5} - \frac{12}{\sqrt{10}} \times \sqrt{3+\sqrt{5}}} \times l = \sqrt{\frac{55+16\sqrt{5}}{5} - \frac{12}{\sqrt{10}} \times \left(\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{55+16\sqrt{5}}{5} - 12 \times \sqrt{\frac{5}{20}} - 12\sqrt{\frac{1}{20}}} \times l = \sqrt{\frac{55+16\sqrt{5}}{5} - \frac{12}{2} - \frac{12}{2\sqrt{5}}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{55+16\sqrt{5}}{5} - 6 - \frac{6\sqrt{5}}{5}} \times l = \sqrt{\frac{55+16\sqrt{5}-30-6\sqrt{5}}{5}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{25+10\sqrt{5}}{5}} \times l = \boxed{\sqrt{5+2\sqrt{5}} \times l} = 3{,}07\ 76\ 83\ 53\ldots\ l$$

por ser sus respectivos planos perpendiculares a I; por lo que la arista común 12-13, intersección de dichas caras, también es perpendicular a I.

En la figura 3 representamos el contorno del arquimediano en dicha zona, que incluye el representado

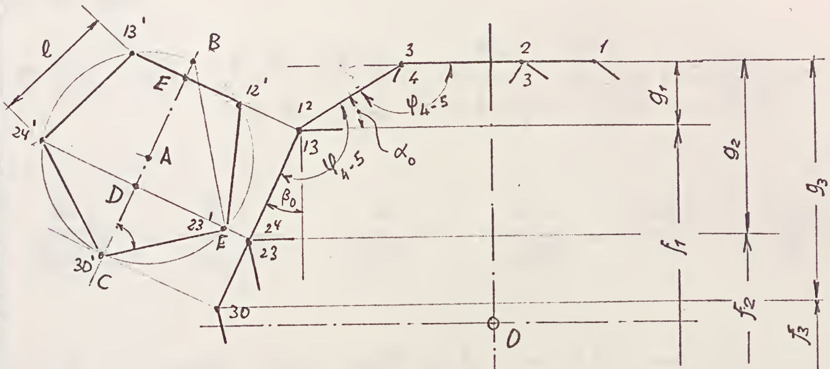


Figura 3

en la figura 2. La cara cuadrada 3-4-13-12, tiene contiguas las caras pentagonales 1 al 5 por la parte superior, y 12-13-24-30-23 por la inferior; esta última la hemos representado también abatida sobre el plano del dibujo (parte izquierda de la figura)

De la figura se deduce:

$$\varphi_{4-5} - \alpha_0 = \frac{\pi}{2} + \beta_0 \qquad [1]$$

siendo "β_0" el ángulo de proyección sobre III de la cara pentagonal 12-13-24-30-23.

De la [1] se deduce:

$$\operatorname{tg}\left(\varphi_{4-5} - \alpha_0\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \beta_0\right) = -\operatorname{ctg}\beta_0 \qquad [2]$$

pero ya hemos deducido en el cálculo de "g_1" que

$$\operatorname{tg}\varphi_{4-5} = -\frac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad y \qquad \operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

por lo que

$$\operatorname{tg}\left(\varphi_{4-5} - \alpha_0\right) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_{4-5} - \operatorname{tg}\alpha_0}{1 + \operatorname{tg}\varphi_{4-5}\,\operatorname{tg}\alpha_0} = \frac{-\frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{2}}{1 + \left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)} = \frac{-(\sqrt{5}-1)}{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 - 1} = \frac{\sqrt{5}-1}{\frac{5+1-2\sqrt{5}}{4} - 1} = \frac{\sqrt{5}-1}{\frac{3-\sqrt{5}}{2} - 1} = \frac{\sqrt{5}-1}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{1-\sqrt{5}} = -\frac{2(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}-1} =$$

$= -2$ valor que sustituído en [2] nos da

$-2 = -\operatorname{ctg}\beta_0 \quad \therefore \quad \operatorname{ctg}\beta_0 = 2$ y de aquí

$$\operatorname{tg}\beta_0 = \frac{1}{2} \qquad [3]$$

de esta última se deduce:

$$\boxed{\cos\beta_0} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta_0}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{2\sqrt{5}}{5}} \qquad [4]$$

Por otra parte, en la cara pentagonal 12'-13'-24'-30'-23', abatida en la parte izquierda de la fig. 3, tendremos:

$\overline{CE}^2 = \overline{CD} \times \overline{CB}$ (el triángulo C-E-B es rectángulo, inscrito en la circunferencia de radio C-A); de donde

$$\overline{CD} \times \overline{CB} = \overline{CE}^2 \quad " \quad \boxed{\overline{CD}} = \frac{\overline{CE}^2}{\overline{CB}} = \frac{l^2}{2\ d_5} = \frac{l^2}{2\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times l} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{4\times(5+\sqrt{5})}{10}}} \times l = \frac{1}{\sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})}{5}}}\, l = \sqrt{\frac{5}{2\times(5+\sqrt{5})}} \times l = \sqrt{\frac{5(5-\sqrt{5})}{2\times 20}}\ l =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\ l}$$

Pero por otra parte tenemos:

$$\boxed{\overline{DE}} = \overline{CE} - \overline{CD} = \overline{CA} + \overline{AE} - \overline{CD} = d_5 + k - \overline{CD} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l + \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\, l -$$

$$- \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\, l = \left[\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} - \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\right) + \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\right] \times l =$$

$$= \left[\sqrt{\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} - \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\right)^2} + \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\right] \times l = \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10} + \frac{5-\sqrt{5}}{8} - 2\times\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}\times\frac{5-\sqrt{5}}{8}}} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\right] \times l = \left[\sqrt{\frac{20+4\sqrt{5}+25-5\sqrt{5}}{40} - 2\times\sqrt{\frac{20}{80}}} + \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\right] \times l =$$

$$= \left[\sqrt{\frac{45-\sqrt{5}}{40} - 1} + \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\right] \times l = \left[\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{40}} + \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\right] \times l =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{40}} + \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\right)^2} \times l = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{40} + \frac{5+2\sqrt{5}}{20} + 2\times\sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(5+2\sqrt{5})}{40\times 20}}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}+10+4\sqrt{5}}{40} + \sqrt{\frac{25-5\sqrt{5}+10\sqrt{5}-10}{10\times 20}}} \times l = \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{40} + \sqrt{\frac{15+5\sqrt{5}}{200}}}\ l =$$

$$= \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{40} + \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{40}}} \times l = \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{40} + \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2\sqrt{10}}} \times l = \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{40} + \frac{\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{10}}}\ l$$

$$= \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{40} + \frac{\sqrt{\frac{50}{2}} + \sqrt{\frac{10}{2}}}{20}} \times l = \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{40} + \frac{5+\sqrt{5}}{20}}\ l = \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}+10+2\sqrt{5}}{40}}\ l =$$

$$= \sqrt{\frac{25+5\sqrt{5}}{40}} \times l = \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \times l}$$

Finalmente de la figura 3, se deduce que

$$\boxed{g_2} = \overline{DE} \cos \beta_0 + g_1 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\, l \times \frac{2\sqrt{5}}{5} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, l =$$

$$= \left(\frac{2}{5}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8} \times 5} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right) \times l = \left(\frac{1}{5}\sqrt{\frac{5(5+\sqrt{5})}{2}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right) \times l =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right) l = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)^2} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10} + \frac{5-\sqrt{5}}{10} + 2 \times \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10} \times \frac{5-\sqrt{5}}{10}}} \times l = \sqrt{\frac{10}{10} + 2\sqrt{\frac{20}{100}}} \times l =$$

$$= \sqrt{1 + \sqrt{\frac{80}{100}}} \times l = \sqrt{1+\sqrt{\frac{4}{5}}}\, l = \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}}\, l = \sqrt{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}}\, l =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\, l} = 1,37\ 63\ 81\ 9\ldots\, l$$

Para el caso del dibujo, será: $g_2 = 1,37\ 63\ 81\ 9 \ldots \times 24,63 = 33,9$ mm

---

<u>Distancia "f_2" entre los dos planos paralelos a II, que contienen los vértices 16 al 25 y 36 al 45, respectivamente</u>

Se obtiene por diferencias de las alturas "c_5" y "g_2", ya calculadas.

$$\boxed{f_2} = 2\,(c_5 - g_2) = 2 \times \left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\, l - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\, l\right) =$$

$$= \left(3\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\right) l = \boxed{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\, l = g_2} = 1,37\ 63\ 81\ 9\ldots\ l$$

El cálculo anterior nos demuestra que

$$\boxed{g_2 = f_2}$$

Radio "r_2" de la circunferencia circunscrita al polígono que tiene por vértices 16 al 25 y también a los 36 al 45.

Dicho radio es un cateto de un triángulo rectángulo de hipotenusa "a" y el otro cateto es "$\frac{f_2}{2}$" (ver lám. 38), de valores ya calculados.

$$\boxed{r_3} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{f_2}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{11+4\sqrt{5}}}{2}\, l\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\, l\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{11+4\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\, l = \sqrt{\frac{55+20\sqrt{5}-5-2\sqrt{5}}{20}}\, l = \sqrt{\frac{50+18\sqrt{5}}{20}}\, l =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{25+9\sqrt{5}}{10}}\, l} = 2,12\ 42\ 55\ 44\ldots\ l$$

Para el caso del dibujo, será: $r_2 = 2,12\ 42\ 55\ 44 \times 24,63 = 52,3$ mm

---

Distancia "g_3" de los vértices 26 al 30 al plano de la cara pentagonal 1 al 5, y de los vértices 31 al 35 a la cara pentagonal 56 al 60.

En la determinación de los valores "g_3", "f_3" y "r_3",

seguiremos el mismo proceso que para los correspondientes "g_2", "f_2" y "r_2", ya calculados, y con las mismas referencias a la figura 3. De ésta se deduce que:

$$\boxed{g_3} = \overline{CE} \cos\beta_0 + g_1 = (d_5 + k)\cos\beta_0 + g_1 =$$

$$= \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{10}}\, l + \sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{20}}\, l\right] \times \frac{2\sqrt5}{5} + \sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}\, l = \left(\frac{2}{5}\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{10}\times 5} +\right.$$

$$\left. + \frac{2}{5}\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{20}\times 5} + \sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}\right)\times l = \left(\frac{2}{5}\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{2}} + \frac{2}{5}\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{4}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}\right) l =$$

$$= \left(\frac{1}{5}\sqrt{2(5+\sqrt5)} + \frac{1}{5}\sqrt{5+2\sqrt5} + \sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}\right) l = \left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt5}}{5} + \frac{\sqrt{5+2\sqrt5}}{5} + \sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}\right) l$$

$$= \left[\frac{1}{5}\times\sqrt{\left(\sqrt{10+2\sqrt5} + \sqrt{5+2\sqrt5}\right)^2} + \sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}\right]\times l = \left[\frac{1}{5}\sqrt{10+2\sqrt5+5+2\sqrt5+2\sqrt{(10+2\sqrt5)(5+2\sqrt5)}} +\right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}\right] l = \left[\frac{1}{5}\sqrt{15+4\sqrt5+2\sqrt{50+10\sqrt5+20\sqrt5+20}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}\right] l =$$

$$= \left[\frac{1}{5}\sqrt{15+4\sqrt5+2\sqrt{70+30\sqrt5}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}\right] l = \left[\frac{1}{5}\sqrt{15+4\sqrt5+2\sqrt{10}\times\sqrt{7+3\sqrt5}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}\right] l =$$

$$= \left[\frac{1}{5}\sqrt{15+4\sqrt5+2\sqrt{10}\times\left(\sqrt{\frac{9}{2}}+\sqrt{\frac{5}{2}}\right)} + \sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}\right]\times l = \left[\frac{1}{5}\sqrt{15+4\sqrt5+2\sqrt{\frac{90}{2}}+2\sqrt{\frac{50}{2}}} +\right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}\right]\times l = \left[\frac{1}{5}\sqrt{15+4\sqrt5+6\sqrt5+10} + \sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}\right]\times l = \left[\frac{1}{5}\sqrt{25+10\sqrt5} + \sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}\right] l =$$

$$= \left[\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{5}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}\right] l = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{5}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}\right)^2}\times l =$$

$$= \sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{5} + \frac{5-\sqrt5}{10} + 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{5}\times\frac{5-\sqrt5}{10}}}\times l = \sqrt{\frac{10+4\sqrt5+5-\sqrt5}{10} + 2\sqrt{\frac{25+10\sqrt5-5\sqrt5-10}{50}}}\times l =$$

$$= \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{10} + 2\sqrt{\frac{15+5\sqrt{5}}{50}}} \times l = \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{10} + \sqrt{\frac{60+20\sqrt{5}}{50}}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{10} + \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{5}}} \times l = \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{10} + \sqrt{\frac{2}{5}} \times \sqrt{3+\sqrt{5}}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{10} + \sqrt{\frac{2}{5}} \times \left(\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)} \times l = \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{10} + \sqrt{\frac{10}{10}} + \sqrt{\frac{2}{10}}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{10} + 1 + \frac{\sqrt{5}}{5}} \times l = \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}+10+2\sqrt{5}}{10}}\, l = \sqrt{\frac{25+5\sqrt{5}}{10}}\, l = \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\, l} =$$

$$= 1.90\ 21\ 14\ 08 \ldots\ l$$

Para el caso del dibujo, será: $g_3 = 1{,}90\ 21\ 14\ 08 \ldots \times 24{,}63 = 46{,}8$ mm

---

Distancia "f_3" entre los planos paralelos a II, que contienen los vértices 26 al 30 y 31 al 35 respectivamente.

Se obtiene por diferencias de las alturas "c_5" y "g_3", ya calculadas.

$$\boxed{f_3} = 2\,(c_5 - g_3) = 2 \times \left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} - \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right) l =$$

$$= \left(3\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} - 2\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right) l = \sqrt{\left(3\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} - 2\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)^2} \times l =$$

$$= \sqrt{9 \times \frac{5+2\sqrt{5}}{5} + 4 \times \frac{5+\sqrt{5}}{2} - 12 \times \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5+\sqrt{5}}{2}}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{45+18\sqrt{5}}{5} + 10 + 2\sqrt{5} - 12\sqrt{\frac{25+10\sqrt{5}+5\sqrt{5}+10}{10}}} \times l = \sqrt{\frac{45+18\sqrt{5}+50+10\sqrt{5}}{5} - \cdots}$$

$$--- - 12\sqrt{\frac{35+15\sqrt{5}}{10}} \times l = \sqrt{\frac{95+28\sqrt{5}}{5} - 12\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{95+28\sqrt{5}}{5} - \frac{12}{\sqrt{2}} \times \sqrt{7+3\sqrt{5}}} \times l = \sqrt{\frac{95+28\sqrt{5}}{5} - \frac{12}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{95+28\sqrt{5}}{5} - 12\times\left(\sqrt{\frac{9}{4}} + \sqrt{\frac{5}{4}}\right)} \times l = \sqrt{\frac{95+28\sqrt{5}}{5} - 12\times\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{95+28\sqrt{5}}{5} - 18 - 6\sqrt{5}} \times l = \sqrt{\frac{95+28\sqrt{5} - 90 - 30\sqrt{5}}{5}} \times l = \boxed{\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} \times l} =$$

$$= 0{,}32\ 49\ 19\ 6 \ldots\ l$$

Para el caso del dibujo, será: $f_3 = 0{,}32\ 49\ 19\ 6\ldots \times 24{,}63 = 8{,}0$ mm

---

Radio "r_3" de la circunferencia circunscrita al polígono que tiene por vértices los 26 al 35.

Dicho radio es un cateto de un triángulo rectángulo de hipotenusa "a" y el otro cateto "$\frac{f_3}{2}$" (ver lám. 38), de valores ya calculados.

$$\boxed{r_3} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{f_3}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{11+4\sqrt{5}}}{2}\,l\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\,l : 2\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{11+4\sqrt{5}}{4} - \frac{5-2\sqrt{5}}{5} : 4} \times l = \sqrt{\frac{11+4\sqrt{5}}{4} - \frac{5-2\sqrt{5}}{20}}\ l =$$

$$= \sqrt{\frac{55+20\sqrt{5} - 5 + 2\sqrt{5}}{20}}\ l = \sqrt{\frac{50+22\sqrt{5}}{20}} \cdot l = \boxed{\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}\ l} = 2{,}22\ 70\ 32\ 73\ldots l$$

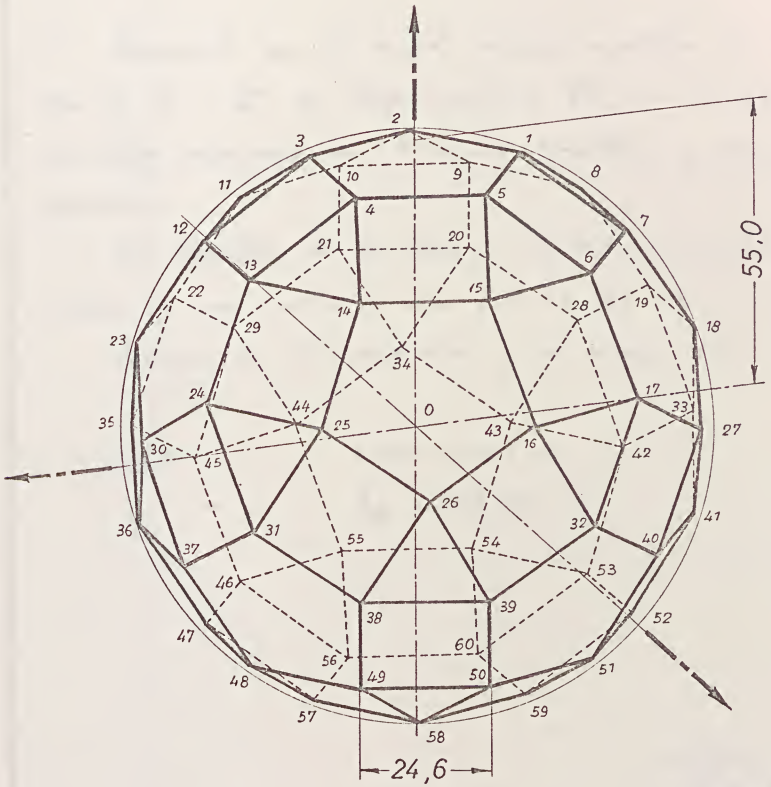
Para el caso del dibujo, será: $r_3 = 2{,}22\ 70\ 32\ 73\ldots \times 24{,}63 = 54{,}9$ mm.

En la proyección II de los vértices 26 al 35 se puede considerar que prácticamente están sobre la proyección de la esfera circunscrita al arquimediano. La diferencia de radios, en el ejemplo de la lámina es tan sólo de 0,1 mm.

En el cuadro sinóptico que damos a continuación, resumimos los resultados de los valores complementarios deducidos.

CUADRO SINÓPTICO DE LAS MAGNITUDES COMPLEMENTARIAS

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
n	$\frac{\sqrt{3}}{2}\, l$	0, 86 60 25.... l
k	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\, l$	0, 68 81 91.... l
f_1	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}\, l$	3, 07 76 84.... l
f_2	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\, l$	1, 37 63 82 l
f_3	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, l$	0, 32 49 20 ... l
g_1	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, l$	0, 52 57 31.... l
g_2	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\, l$	1, 37 63 82..... l
g_3	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\, l$	1, 90 21 14 l
r_1	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}\, l$	1, 61 80 34.... l
r_2	$\sqrt{\frac{25+9\sqrt{5}}{10}}\, l$	2, 12 42 55 ... l
r_3	$\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}\, l$	2, 22 70 33 ... l
$f_2 = g_2 = 2k = \frac{2C_5}{3}$ (relaciones notables)		



Arquimediano VI

Lámina 39	Poliedros arquimedianos Arquimediano VII $(1P_3 + 2P_6)$	39

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el Arquimediano VII, en el que en cada vértice concurren un triángulo equilátero y dos exágonos regulares.

La longitud de su lado es de 46.9 mm, y las coordenadas de su centro 0, son (72, 72, 85) mm.

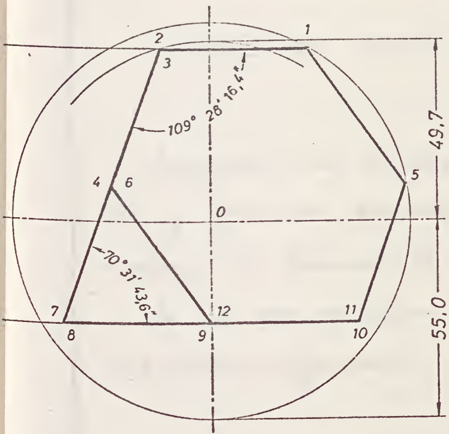
Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

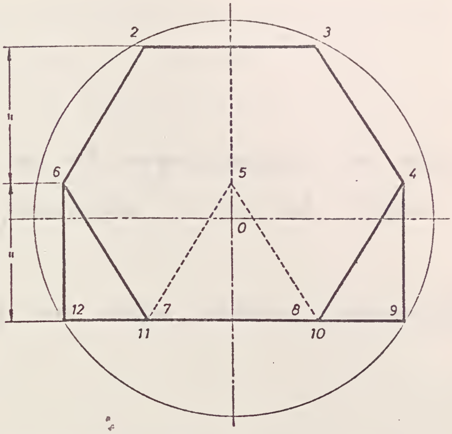
DATOS 0 (72, 72, 85) mm.

$l_{VII} = 46.9$ mm

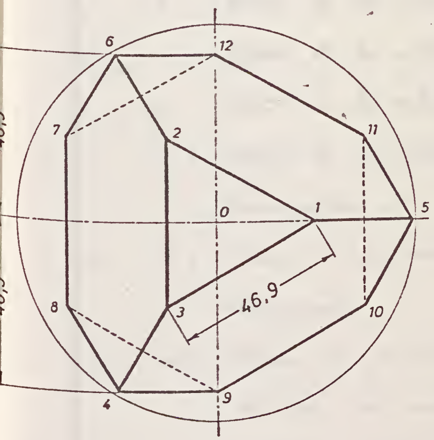
[illegible]		13-4-73

+Z





+X O +Y



+Y

ARQUIMEDIANO VII

Número de caras triangulares	C_3 = 4
Número de caras exagonales	C_6 = 4
Número de vértices	V = 12
Número de aristas	A = 18
Número de caras de un ángulo sólido	$1P_3 + 2P_6$

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico en los planos I, II y III, el Arquimediano VII en el que en cada vértice concurren un triángulo equilátero y dos exágonos regulares.

La longitud de su lado es de 46,9 milímetros, y las coordenadas de su centro O, son: O(72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

II

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela
Fecha:						Curso
Alumno:						
Escala 1:1	Arquimediano VII					Lámina 39
						Curso 19 - 19

CONSIDERACIONES PREVIAS

Seguiremos, en el estudio de este arquimediano, las directrices y fórmulas generales planteadas en el del "Arquimediano I", lámina 33.

En el caso particular que nos ocupa, determinaremos las magnitudes siguientes:

r_{i-VII} l = Arista del Arquimediano VII (dato del ejercicio).

r_{c-VII} a = Radio de la esfera circunscrita.

r_{t-VII} b = Radio de la esfera tangente a las aristas.

r_{i_3-VII} c_3 = Radio de la esfera tangente a las caras triangulares.

r_{i_6-VII} c_6 = Radio de la esfera tangente a las caras exagonales.

r_{c3} d_3 = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara triangular.

r_{c6} d_6 = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara exagonal.

r_1 m = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las aristas de un ángulo sólido.

α_3 = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara triangular con el plano diametral del arquimediano, que pasa por una arista de aquilla.

α_6 = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara

exagonal con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.

φ_{3-6} = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara triangular y otra exagonal.

φ_{6-6} = Angulo rectilíneo del diedro formado por dos caras exagonales.

S = Superficie

V = Volumen.

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

El estudio realizado de este arquimediano, nos indica que se compone de 4 caras triangulares y 4 caras exagonales; 12 vértices y 18 aristas.

En cada vértice concurren un triángulo y dos exágonos, todos regulares.

Así pues, tendremos que

$$\boxed{\text{ARQUIMEDIANO VII } (1\,P_3 + 2\,P_6);\quad C_3 = 4;\quad C_6 = 4;\quad V = 12;\quad A = 18}$$

Cálculo de sus magnitudes

Arista "l" del arquimediano

Dato del ejercicio

Radio "m" de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las tres aristas que concurren en un ángulo sólido.

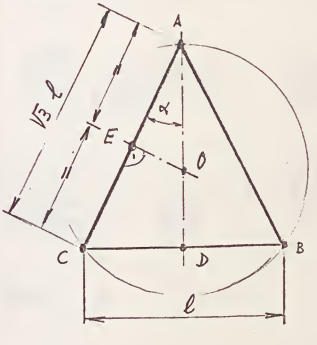


Figura 1

Dicho polígono (fig. 1) es un triángulo isósceles, cuya base BC es la arista "l" del arquimediano (lado de la cara triangular), y sus otros dos lados iguales AC = AB, corresponden a la diagonal de la cara exagonal también de lado "l".

La Geometría nos enseña que esta diagonal, es

$$AC = AB = \sqrt{3}\, l$$

De la figura se deduce:

$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2} = \sqrt{(\sqrt{3}\, l)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{3l^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{3 - \frac{1}{4}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{11}{4}} \times l = \frac{\sqrt{11}}{2}\, l ;$$ por lo que será:

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{11}}{2}\, l : \sqrt{3}\, l = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{33}}{6}$$ y también:

$$\overline{AO} = \boxed{m} = \frac{\overline{AE}}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, l : \frac{\sqrt{33}}{6} = \frac{6\sqrt{3}}{2\sqrt{33}}\, l = 3\sqrt{\frac{3}{33}}\, l = 3\sqrt{\frac{1}{11}}\, l = 3 \times \frac{\sqrt{11}}{11}\, l$$

$$= \boxed{\frac{3\sqrt{11}}{11}\, l} = 0,90\ 45\ 34\ 03 \ldots\, l$$

Para el caso del dibujo será:

$m = 0,90\ 45\ 34\ 03 \times 46,9 = 42,4$ mm

UNE A4 210 X 297

Radio "a" de la esfera circunscrita

Se obtiene aplicando la fórmula general [1] (ver lám. 33) a este caso particular.

$$\boxed{a} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - m^2}} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - \left(\frac{3\sqrt{11}}{11}\ell\right)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{9\times 11}{11^2}}}\,\ell = \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{9}{11}}}\,\ell =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{2}{11}}}\,\ell = \frac{1}{\sqrt{\frac{8}{11}}}\,\ell = \sqrt{\frac{11}{8}}\,\ell = \frac{\sqrt{22}}{4}\,\ell = \boxed{1,17\,26\,03\,94\ldots\,\ell}$$

Para $a = 55$ mm, $\ell = \frac{55}{1.17\,26\,03\,94} = 46,904$ mm.

Radio "b" de la esfera tangente a las aristas

Aplicando la fórmula general [3], (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{b} = \sqrt{a^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{22}}{4}\ell\right)^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{\frac{22}{16} - \frac{1}{4}} \times \ell = \sqrt{\frac{11}{8} - \frac{1}{4}}\,\ell =$$

$$= \sqrt{\frac{11-2}{8}}\,\ell = \sqrt{\frac{9}{8}}\,\ell = \frac{3}{2\sqrt{2}}\,\ell = \boxed{\frac{3\sqrt{2}}{4}\,\ell} = 1,06\,06\,60\,17\ldots\,\ell$$

Para el caso del dibujo, será: $b = 1,06\,06\,60\,17\ldots \times 46,904 = 49,7$ mm

---

Radio "d_3" de la circunferencia circunscrita a una cara triangular de lado "ℓ"

Se demuestra en Geometría, es

$$\boxed{d_3} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}\,l} = 0,57\,73\,50\,27\ldots\,l$$

Para el caso del dibujo será: $d_3 = 0,57\,73\,50\,27.. \times 46,9 = 27,1$ mm.

Radio "d_6" de la circunferencia circunscrita a una cara exagonal de lado "l"

Se demuestra en Geometría, es

$$\boxed{d_6 = l}$$

Radio "C_3" de la esfera tangente a las caras triangulares de lado "l"

Aplicando la fórmula general [2] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{C_3} = \sqrt{a^2 - (d_3)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{22}}{4}\,l\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\,l\right)^2} = \sqrt{\frac{22}{16} - \frac{3}{9}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{11}{8} - \frac{1}{3}} \times l = \sqrt{\frac{33-8}{24}} \times l = \sqrt{\frac{25}{24}} \times l = \frac{5}{2\sqrt{6}} \times l = \boxed{\frac{5\sqrt{6}}{12}\,l} =$$

$$= 1,02\,06\,20\,73\ldots\,l$$

Para el caso del dibujo, será: $C_3 = 1,02\,06\,20\,73 \times 46,9 = 47,9$ mm.

Radio "C_6" de la esfera tangente a las caras exagonales de lado "l"

Aplicando la fórmula general [2] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{c_6} = \sqrt{a^2 - (d_6)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{22}}{4}\,l\right)^2 - l^2} = \sqrt{\frac{22}{16} - 1} \times l = \sqrt{\frac{6}{16}} \times l = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{4}\,l} =$$

$$= 0.61\ 23\ 72\ 44 \ldots\ l$$

Para el caso del dibujo, será: $\underline{c_6} = 0{,}61\ 23\ 72\ 44 \ldots \times 46{,}9 = 28{,}7$ m m.

Angulo rectilíneo "α_3" del diedro formado por una cara triangular, con el plano diametral del arquimediano, que pasa por una arista de aquélla.

Se obtiene, en función de su tangente, por la fórmula general [5] (ver lám. 33).

$$\boxed{tg\ \alpha_3} = \frac{2\,c_3}{\sqrt{4\,(d_3)^2 - l^2}} = \frac{2 \times \frac{5\sqrt{6}}{12}\,l}{\sqrt{4 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\,l\right)^2 - l^2}} = \frac{\frac{5\sqrt{6}}{6}}{\sqrt{4 \times \frac{1}{3} - 1}} = \frac{5\sqrt{6}}{6} : \sqrt{\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{5}{6}\sqrt{6 : \frac{1}{3}} = \frac{5}{6}\sqrt{18} = \frac{5 \times 3 \times \sqrt{2}}{6} = \boxed{\frac{5\sqrt{2}}{2}} = 3{,}53\ 55\ 33\ 9$$

$lg\ tg\ \alpha_3 = 0{,}54\ 84\ 550$ $\qquad \boxed{\alpha_3 = 74^\circ\ 12'\ 24{,}6''}$

Angulo rectilíneo "α_6" del diedro formado por una cara exagonal, con el plano diametral del arquimediano, que pasa por una arista de aquélla.

Se obtiene, en función de su tangente, por la fórmula general [6]. (ver lám. 33).

$$\boxed{tg\ \alpha_6} = \frac{2\,c_6}{\sqrt{4\,(d_6)^2 - l^2}} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{6}}{4}\,l}{\sqrt{4\,l^2 - l^2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} : \sqrt{3} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 0{,}70\ 71\ 06\ 8 \ldots$$

$\lg \operatorname{tg} \alpha_6 = \bar{1},8494850$ $\boxed{\alpha_6 = 35^\circ\ 15'\ 51,8''}$

Angulo rectilíneo φ_{3-6} del diedro formado por una cara triangular y una exagonal, ambas regulares.

Aplicando la fórmula general [4] (ver lám. 33), tendremos

$$\boxed{\varphi_{3-6}} = \alpha_3 + \alpha_6 = 74^\circ\ 12'\ 24,6'' + 35^\circ\ 15'\ 51,8''$$

$$= \boxed{109^\circ\ 28'\ 16,4''}$$

Puede obtenerse su valor directamente, por la fórmula

$$\boxed{\operatorname{tg} \varphi_{3-6}} = \operatorname{tg}(\alpha_3 + \alpha_6) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_3 + \operatorname{tg}\alpha_6}{1 - \operatorname{tg}\alpha_3\ \operatorname{tg}\alpha_6} = \frac{\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{5\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{1 - \frac{10}{4}} =$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{-\frac{6}{4}} = -\frac{3\sqrt{2}}{\frac{3}{2}} = \boxed{-2\sqrt{2}}$$

y haciendo $\varphi_0 = \pi - \varphi_{3-6}$, será

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = -\operatorname{tg}\varphi_{3-6} = -(-2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} = 2,8284271\ldots$$

$\lg \operatorname{tg} \varphi_0 = 0,4515408$ $\varphi_0 = 70^\circ\ 31'\ 43,6''$

$$\boxed{\varphi_{3-6}} = 180^\circ - 70^\circ\ 31'\ 43,6'' = \boxed{109^\circ\ 28'\ 16,4''}$$

Angulo rectilíneo φ_{6-6} del diedro formado por dos caras exagonales regulares

Aplicando la fórmula general [4], (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{\varphi_{6-6}} = 2\alpha_6 = 2 \times (35^\circ\ 15'\ 51,8'') = \boxed{70^\circ\ 31'\ 43,6''}$$

Puede obtenerse directamente, por la fórmula

$$\boxed{\operatorname{tg} \varphi_{6-6}} = \operatorname{tg} 2\alpha_6 = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha_6}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha_6} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \boxed{2\sqrt{2}} =$$

$$= 2{,}82\ 84\ 27\ 1 \ldots \qquad \lg \operatorname{tg} \varphi_{6-6} = 0.45\ 15\ 40\ 8$$

$$\boxed{\varphi_{6-6} = 70^\circ\ 31'\ 43{,}6''}$$

Las fórmulas anteriores nos demuestran que los ángulos φ_{3-6} y φ_{6-6}, son suplementarios, puesto que

$$\varphi_{3-6} + \varphi_{6-6} = 109^\circ\ 28'\ 16.4'' + 70^\circ\ 31'\ 43{,}6'' = 180^\circ = \pi$$

lo cual se deduce también de sus valores trigonométricos, ya que

$$\operatorname{tg} \varphi_{3-6} + \operatorname{tg} \varphi_{6-6} = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 0$$

Area lateral "S" del arquimediano

Se compone de la suma de 4 caras triangulares y 4 caras exagonales, ambas regulares y de igual lado "l"; la superficie será pues

$$\boxed{S} = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 + 4 \times \frac{6\sqrt{3}}{4} l^2 = \left(\sqrt{3} + 6\sqrt{3}\right) l^2 = \boxed{7\sqrt{3}\ l^2} =$$

$$= 12{,}\ 12\ 43\ 55\ 66 \ldots l^2$$

Volumen "V" del arquimediano

Se compone de la suma de 4 pirámides triangulares regulares de lado "ℓ" y altura "c_3", y de otras cuatro de base exagonal regular de lado "ℓ" y altura "c_6".
Su volumen será pues:

$$\boxed{V} = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \ell^2 \times \frac{c_3}{3} + 4 \times \frac{6\sqrt{3}}{4} \ell^2 \times \frac{c_6}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \ell^2 \times \frac{5\sqrt{6}}{12} \ell + 2\sqrt{3}\, \ell^2 \times \frac{\sqrt{6}}{4} \ell =$$

$$= \left(\frac{5\sqrt{18}}{36} + \frac{2\sqrt{18}}{4} \right) \ell^3 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{12} + \frac{3\sqrt{2}}{2} \right) \ell^3 = \left(\frac{5\sqrt{2} + 18\sqrt{2}}{12} \right) \ell^3 = \boxed{\frac{23\sqrt{2}}{12} \ell^3}$$

$$= 2,71\,05\,75\,99\ldots\ \ell^3$$

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por el acoplamiento de 4 triángulos equiláteros de lado $\ell = 46,9$ mm y 4 exágonos regulares, también de lado "ℓ". El acoplamiento deberá hacerse de forma que en cada vértice concurran dos exágonos y un triángulo.

NOTA.- Obsérvese que los ángulos diedros φ_{3-6} y φ_{6-6}, son respectivamente iguales a los del tetraedro regular (lám. 1) y octaedro regular (lám. 3).

Lámina 39	Poliedros arquimedianos Arquimediano VII	Hoja nº 10

En el cuadro sinóptico que damos a continuación, están resumidos los resultados analíticos obtenidos anteriormente.

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{\sqrt{22}}{4}\ell$	$1,17\,26\,04\ldots\ell$
b	$\frac{3\sqrt{2}}{4}\ell$	$1.06\,06\,60\ldots\ell$
c_3	$\frac{5\sqrt{6}}{12}\ell$	$1.02\,06\,21\ldots\ell$
c_6	$\frac{\sqrt{6}}{4}\ell$	$0.61\,23\,72\ldots\ell$
d_3	$\frac{\sqrt{3}}{3}\ell$	$0.57\,73\,50\ldots\ell$
d_6	$1\,\ell$	$1,00\,00\,00\ldots\ell$
m	$\frac{3\sqrt{11}}{11}\ell$	$0,90\,45\,34\ldots\ell$
α_3	$tg\,\alpha_3 = \frac{5\sqrt{2}}{2}$	$tg\,\alpha_3 = 3,53\,55\,34$ $\alpha_3 = 74^\circ\,12'\,24,6''$
α_6	$tg\,\alpha_6 = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$tg\,\alpha_6 = 0.70\,71\,07$ $\alpha_6 = 35^\circ\,15'\,51,8''$
φ_{3-6}	$tg\,\varphi_{3-6} = -2\sqrt{2}$	$tg\,\varphi_{3-6} = -2,82\,84\,27$ $\varphi_{3-6} = 109^\circ\,28'\,16,4''$
φ_{6-6}	$tg\,\varphi_{6-6} = 2\sqrt{2}$	$tg\,\varphi_{6-6} = 2,82\,84\,27$ $\varphi_{6-6} = 70^\circ\,31'\,43,6''$
S	$7\sqrt{3}\,\ell^2$	$12,12\,43\,56\ldots\ell^2$
V	$\frac{23\sqrt{2}}{12}\ell^3$	$2.71\,05\,76\ldots\ell^3$

UNE A4 210 X 297

		14 - 4 - 73

PROCESO GRÁFICO - ANALÍTICO

Después del cálculo de las magnitudes principales, vamos a proceder, en la lámina 39, a la representación gráfica del Arquimediano VII.

Para su trazado nos valdremos de cotas calculadas por las fórmulas anteriores, y de procesos gráficos.

Con este objeto, calculemos previamente las siguientes magnitudes:

l_{VII} = Dato del ejercicio = 46,9 mm

a = 1,17 26 04 ... × 46,9 = 55,0 mm

b = 1,06 06 60 ... × 46,9 = 49,7 mm

c_3 = 1,02 06 21 ... × 46,9 = 47,9 mm

c_6 = 0,61 23 72 ... × 46,9 = 28,7 mm

d_3 = 0,57 73 50 ... × 46,9 = 27,1 mm

d_6 = 1,00 00 00 ... × 46,9 = 46,9 mm

El orden de operaciones del trazado gráfico (lám. 39), es el siguiente:

1.º Situar el centro O, de coordenadas O(72, 72, 85) mm.

2.º Dibujar en I, II y III las proyecciones de la esfera circunscrita, de radio a = 55,0 mm.

3.º Representar en I, II y III la cara triangular superior 1-2-3, supuesto el poliedro colocado con dicha cara paralela a II y un lado (2-3) perpendicular a I. (utilícese la cota "c_3" en I y III).

Lámina 39	Poliedros arquimedianos Arquimediano VII	Hoja nº 12

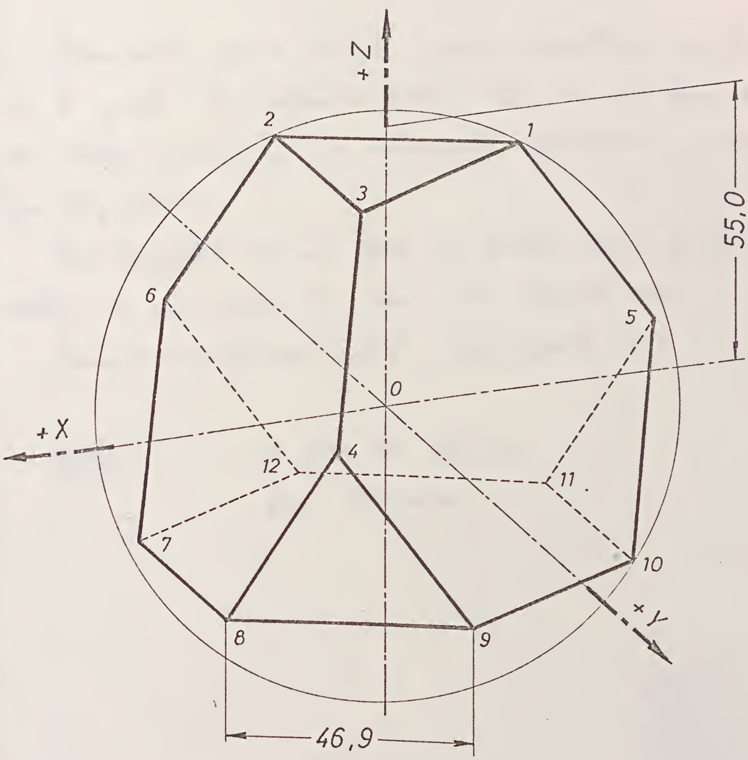
4º Representar en I, II y III la cara exagonal inferior 7 al 12, también con un lado (7-8) perpendicular a I; dicha cara es paralela a II (utilícese la cota "c_6" en I y III).

5º Representar en I, II y III la cara exagonal 4-3-2-6-7-8 contigua a las representadas según las operaciones 3ª y 4ª: En I la proyección es una recta (su plano es perpendicular a I). En II, se conocen los vértices 2-3-7-8; los restantes 6 y 4 están situados en una paralela a los lados 2-3, 7-8 y equidistante de éstos (la recta 6-4 es diámetro del exágono y por consiguiente, eje de simetría del mismo). Conocida la proyección de la cara en I y II, la de III es inmediata.

6º Completar en I, II y III las proyecciones de las caras restantes, que no ofrecen dificultad y se deducen de las ya obtenidas anteriormente.

Como comprobación del trazado, obsérvese que los vértices 1 y 5 en I, y los 9 y 12 en III deben quedar situados en los respectivos contornos aparentes de la esfera circunscrita (radio a = 55 mm).

		18-4-73



Arquimediano VII

Lámina 40	Poliedros arquimedianos Arquimediano VIII ($1P_3 + 2P_8$)	40

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el Arquimediano VIII, en el que en cada vértice concurren un triángulo equilátero y dos octógonos regulares.

La longitud de su lado es de 30,9 mm, y las coordenadas de su centro O, son (72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3V y a escala 1:1.

DATOS

O (72, 72, 85) mm

l_{VIII} = 30,9 mm

		15 - 4 - 73

[illegible]

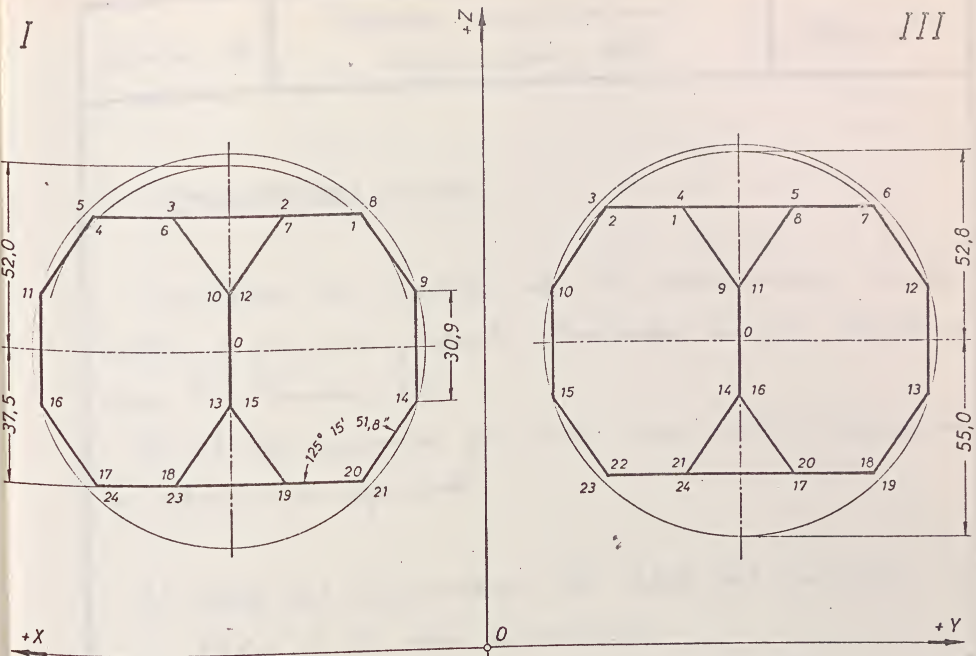
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]

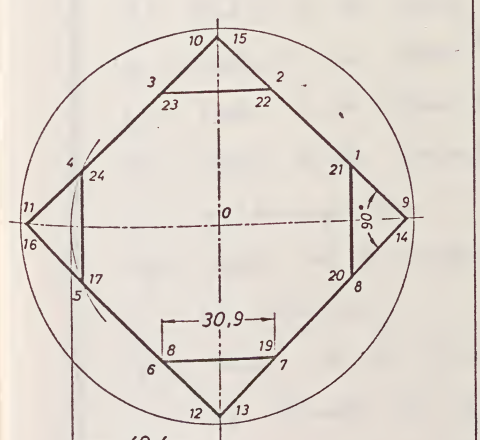
[illegible]
[illegible]
[illegible]

[illegible]
[illegible]

I

III





ARQUIMEDIANO VIII

Número de caras triangulares	$C_3 = 8$
Número de caras octogonales	$C_8 = 6$
Número de vértices	$V = 24$
Número de aristas	$A = 36$
Número de caras de un ángulo sólido	$1P_3 + 2P_8$

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el Arquimediano VIII, en el que en cada vértice concurren un triángulo equilátero y dos octógonos regulares.

La longitud de su lado es de 30,9 milímetros y las coordenadas de su centro O, son O (72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

II

	Propuesta	De entrega	Entregada	Califi-cación	(firma)	Escuela / Curso
Fecha:						
Alumno:						
Escala 1:1	Arquimediano VIII					Lámina 40 / Curso 19 -19

CONSIDERACIONES PREVIAS

Seguiremos, en el estudio de este arquimediano, las directrices y fórmulas generales planteadas en el "Arquimediano I", lámina 33.

En el caso particular que nos ocupa, determinaremos las magnitudes siguientes:

l = Arista del Arquimediano VIII (dato del ejercicio).

a = Radio de la esfera circunscrita

b = Radio de la esfera tangente a las aristas.

c_3 = Radio de la esfera tangente a las caras triangulares.

c_8 = Radio de la esfera tangente a las caras octogonales.

d_3 = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara triangular.

d_8 = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara octogonal.

m = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las aristas de un ángulo sólido.

α_3 = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara triangular, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.

α_8 = Angulo rectilíneo del diedro formado por una

cara octogonal, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.

φ_{3-8} = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara triangular y otra octogonal.

φ_{8-8} = Angulo rectilíneo del diedro formado por dos caras octogonales.

S = Superficie

V = Volumen.

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

El estudio realizado de este arquimediano, nos indica que se compone de 8 caras triangulares y 6 caras octogonales; 24 vértices y 36 aristas.

En cada vértice concurren un triángulo y dos octógonos, todos regulares.

Así pues, tendremos que

$$\boxed{\text{ARQUIMEDIANO VIII } (1P_3 + 2P_8); \quad C_3 = 8; \quad C_8 = 6; \quad V = 24; \quad A = 36}$$

Cálculo de sus magnitudes

Arista "l" del arquimediano

Dato del ejercicio

Radio "m" de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las tres aristas que concurren en un ángulo sólido.

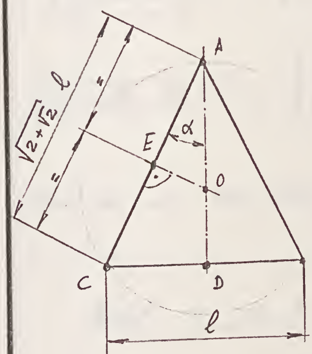


Figura 1

Dicho polígono (fig. 1) es un triángulo isósceles, cuya base $\overline{BC}$ es la arista "ℓ" del arquimediano (lado de la cara triangular), y sus otros dos lados iguales $AC = AB$, corresponden a la diagonal del octógono de lado "ℓ" que une los extremos de dos lados consecutivos.

La Geometría nos enseña que esta diagonal, es

$$\overline{AC} = \overline{AB} = \sqrt{2+\sqrt{2}}\ \ell\ .$$

De la figura se deduce:

$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\ \ell\right)^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = \sqrt{2+\sqrt{2}-\frac{1}{4}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{8+4\sqrt{2}-1}{4}} \times \ell = \frac{\sqrt{7+4\sqrt{2}}}{2}\ \ell\ ;$$ por lo que será:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{7+4\sqrt{2}}}{2}\ \ell : \sqrt{2+\sqrt{2}}\ \ell = \frac{\sqrt{7+4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{7+4\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} =$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{(7+4\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{2}} = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{14+8\sqrt{2}-7\sqrt{2}-8}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6+\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{6+\sqrt{2}}{8}}\ ;$$

y en consecuencia

$$\overline{AO} = \boxed{m} = \frac{\overline{AE}}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\,\ell : \sqrt{\frac{6+\sqrt{2}}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{2}) : \frac{6+\sqrt{2}}{8}}\,\ell =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\,(2+\sqrt{2})}{6+\sqrt{2}}} \times \ell = \sqrt{\frac{2\,(2+\sqrt{2})}{6+\sqrt{2}}} \times \ell = \sqrt{\frac{2\,(2+\sqrt{2})(6-\sqrt{2})}{34}}\,\ell =$$

$$= \sqrt{\frac{12+6\sqrt{2}-2\sqrt{2}-2}{17}} \times \ell = \boxed{\sqrt{\frac{10+4\sqrt{2}}{17}} \times \ell} = 0{,}95\,96\,82\,98\ldots\ell$$

Para el caso del dibujo, será: $m = 0{,}95\,96\,82\,98\ldots \times 30{,}92 = 29{,}7$ mm.

Radio "a" de la esfera circunscrita

Se obtiene aplicando la fórmula general [1] (ver lám. 33)

$$\boxed{a} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - m^2}} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - \left(\sqrt{\frac{10+4\sqrt{2}}{17}}\,\ell\right)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{10+4\sqrt{2}}{17}}} \times \ell =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{7-4\sqrt{2}}{17}}} \times \ell = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{17}{7-4\sqrt{2}}} \times \ell = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{17\,(7+4\sqrt{2})}{17}} \times \ell =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{7+4\sqrt{2}} \times \ell = \boxed{\frac{\sqrt{7+4\sqrt{2}}}{2} \times \ell} = 1{.}77\,88\,23\,60\ldots\,\ell =$$

Para el caso del dibujo, será: $a = 55$ mm $\quad \ell = 30{.}92$ mm.

Radio "b" de la esfera tangente a las aristas

Aplicando la fórmula general [3] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{b} = \sqrt{a^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{7+4\sqrt{2}}}{2}\,\ell\right)^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{\frac{7+4\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{4}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{6+4\sqrt{2}}{4}} \times \ell = \boxed{\frac{\sqrt{6+4\sqrt{2}}}{2} \times \ell} = 1,70\,71\,06\,78\ldots\,\ell = \frac{\left(\sqrt{\frac{8}{2}} + \sqrt{\frac{4}{2}}\right)}{2}\,\ell = \boxed{\frac{2+\sqrt{2}}{2}\,\ell}$$

Para el caso del dibujo, será: $b = 1,70\,71\,06\,78.. \times 30,92 = 52,8$ mm.

Radio "d_3" de la circunferencia circunscrita a una cara triangular de lado "ℓ"

Se demuestra en Geometría, es

$$\boxed{d_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}\,\ell} = 0,57\,73\,50\,27\ldots\,\ell$$

Para el caso del dibujo, será: $d_3 = 0,57\,73\,50\,27\ldots \times 30,92 = 17,9$ mm

---

Radio "d_8" de la circunferencia circunscrita a una cara octogonal de lado "ℓ"

Se demuestra en Geometría, es

$$\boxed{d_8 = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}\,\ell} = 1,30\,65\,62\,96\ldots\,\ell$$

Para el caso del dibujo, será: $d_8 = 1,30\,65\,62\,96.. \times 30,92 = 40,4$ mm

---

Radio "c_3" de la esfera tangente a las caras triangulares de lado "ℓ".

UNE A4 210 X 297

Aplicando la fórmula general [2] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{c_3} = \sqrt{a^2 - (d_3)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{7+4\sqrt{2}}}{2}\,l\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\,l\right)^2} = \sqrt{\frac{7+4\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{3}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{21+12\sqrt{2}-4}{12}} \times l = \sqrt{\frac{17+12\sqrt{2}}{12}} \times l = \frac{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}{2\sqrt{3}}\,l = \frac{\sqrt{\frac{18}{2}} + \sqrt{\frac{16}{2}}}{2\sqrt{3}}\,l =$$

$$= \frac{3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\,l = \boxed{\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{6}\,l} = 1{,}68\ 25\ 21\ 99\ldots\,l$$

Para el caso del dibujo, será: $c_3 = 1{,}68\ 25\ 21\ 99.. \times 30{,}92 = 52{,}0$ mm

---

Radio "c_8" de la esfera tangente a las caras octogonales de lado "l"

Aplicando la fórmula general [2] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{c_8} = \sqrt{a^2 - (d_8)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{7+4\sqrt{2}}}{2}\,l\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}\,l\right)^2} = \sqrt{\frac{7+4\sqrt{2}}{4} - \frac{2+\sqrt{2}}{2}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{7+4\sqrt{2}-4-2\sqrt{2}}{4}} \times l = \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{4}} \times l = \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{2}\,l = \frac{\sqrt{\frac{4}{2}} + \sqrt{\frac{2}{2}}}{2}\,l =$$

$$= \boxed{\frac{1+\sqrt{2}}{2}\,l} = 1{,}\ 21\ 21\ 06\ 78\ldots\,l$$

Para el caso del dibujo, será: $c_8 = 1{,}21\ 21\ 06\ 78.. \times 30{,}92 = 37{,}5$ mm

---

Ángulo rectilíneo "α_3" del diedro formado por una cara triangular, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.

Se obtiene, en función de su tangente, por la fórmula general [5] (ver lám. 33).

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha_3} = \frac{2\,c_3}{\sqrt{4(d_3)^2 - \ell^2}} = \frac{2 \times \frac{3\sqrt{3} + 2\sqrt{6}}{6}\ell}{\sqrt{4\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\ell\right)^2 - \ell^2}} = \frac{3\sqrt{3} + 2\sqrt{6}}{3\sqrt{4 \times \frac{1}{3} - 1}} = \frac{3\sqrt{3} + 2\sqrt{6}}{3\sqrt{\frac{1}{3}}} =$$

$$= \frac{(3\sqrt{3} + 2\sqrt{6}) \times \sqrt{3}}{3} = \frac{9 + 2\sqrt{18}}{3} = \frac{9 + 6\sqrt{2}}{3} = \boxed{3 + 2\sqrt{2}} = 5{,}82\,84\,27\,12\ldots$$

$\lg \operatorname{tg} \alpha_3 = 0{,}76\,55\,51\,3$ $\boxed{\alpha_3 = 80^\circ\ 15'\ 51.8''}$

Angulo rectilíneo "α_8" del diedro formado por una cara octogonal, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aguilla.

Se obtiene, en función de su tangente, por la fórmula general [6] (ver lám. 33).

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha_8} = \frac{2\,c_8}{\sqrt{4(d_8)^2 - \ell^2}} = \frac{2 \times \frac{1+\sqrt{2}}{2}\ell}{\sqrt{4\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}\,\ell\right)^2 - \ell^2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4 \times \frac{2+\sqrt{2}}{2} - 1}} =$$

$$= \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}-1}} = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} = \frac{1+\sqrt{2}}{\left(\sqrt{\frac{4}{2}} + \sqrt{\frac{2}{2}}\right)} = \frac{1+\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+1)} =$$

$$= \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

$\boxed{\alpha_8 = 45^\circ}$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Angulo rectilíneo "$\varphi_{3\text{-}8}$" del diedro formado por una cara triangular y otra octogonal, ambas regulares.

Aplicando la fórmula general [4] (ver lám. 33), tendremos:

$$\boxed{\varphi_{3-8}} = \alpha_3 + \alpha_8 = 80^\circ\ 15'\ 51.8'' + 45^\circ = \boxed{125^\circ\ 15'\ 51{,}8''}$$

Puede obtenerse directamente, de la siguiente manera:

$$\boxed{tg\ \varphi_{3-8}} = tg\,(\alpha_3 + \alpha_8) = \frac{tg\ \alpha_3 + tg\ \alpha_8}{1 - tg\ \alpha_3\ tg\ \alpha_8} = \frac{3 + 2\sqrt{2} + 1}{1 - (3 + 2\sqrt{2}) \times 1} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{1 - 3 - 2\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{4 + 2\sqrt{2}}{-2 - 2\sqrt{2}} = -\frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} = -\frac{(2 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)}{1} = -(2\sqrt{2} + 2 - 2 - \sqrt{2}) = \boxed{-\sqrt{2}}$$

y haciendo $\alpha_0 = \pi - \varphi_{3-8}$, será: $tg\ \alpha_0 = -tg\ \varphi_{3-8} = -(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

$lg\ tg\ \alpha_0 = \frac{1}{2}\ lg\ 2 = 0.15\ 05\ 15\ 0$ $\qquad \alpha_0 = 54^\circ\ 44'\ 8{,}2''$

$$\boxed{\varphi_{3-8}} = 180^\circ - 54^\circ\ 44'\ 8{,}2'' = \boxed{125^\circ\ 15'\ 51{,}8''}$$

Angulo rectilíneo "$\varphi_{8\text{-}8}$" del diedro formado por dos caras octogonales regulares

Aplicando la fórmula general [4] (ver lám. 33), tendremos

$$\boxed{\varphi_{8-8}} = 2\ \alpha_8 = 2 \times 45^\circ = \boxed{90^\circ}$$

Area lateral "S" del arquimediano

Se compone de la suma de 8 caras triangulares y 6 caras octogonales, ambas regulares y de igual lado "ℓ".

Siendo "d_8" el radio de la circunferencia circunscrita al octógono de lado "ℓ", su apotema será:

$$\text{apotema} = \sqrt{(d_8)^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}\,\ell\right)^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{4+2\sqrt{2}-1}{4}} \times \ell = \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{2} \times \ell,$$ y el área pedida será:

$$\boxed{S} = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{4}\,\ell^2 + 6 \times \frac{8\ell}{2} \times \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{2} \times \ell = \left(2\sqrt{3} + 12\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right) \times \ell^2 =$$

$$= \left[2\sqrt{3} + 12\left(\sqrt{\frac{4}{2}} + \sqrt{\frac{2}{2}}\right)\right] \times \ell^2 = \left(2\sqrt{3} + 12\sqrt{2} + 12\right) \times \ell^2 = \boxed{2\times\left(\sqrt{3} + 6\sqrt{2} + 6\right)\ell^2} =$$

$$= 32{,}43\,46\,64\,34\ldots\,\ell^2$$

Volumen "V" del arquimediano.

Se compone de la suma de 8 pirámides triangulares regulares de lado "ℓ" y altura "c_3", y de 6 pirámides octogonales regulares de lado "ℓ" y altura "c_8". Su volumen será pues:

$$\boxed{V} = 2\sqrt{3}\,\ell^2 \times \frac{c_3}{3} + 12\left(\sqrt{2}+1\right)\ell^2 \times \frac{c_8}{3} = 2\sqrt{3}\,\ell^2 \times \frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{6\times 3} \times \ell +$$

$$+ 12\left(\sqrt{2}+1\right)\ell^2 \times \frac{\sqrt{2}+1}{2\times 3}\,\ell = \left(\frac{9+6\sqrt{2}}{9} + 2\left(\sqrt{2}+1\right)^2\right) \times \ell^3 = \left(\frac{3+2\sqrt{2}}{3} + \right.$$

$$+\frac{6(\sqrt{2}+1)^2}{3}\Big)\ell^3=\frac{3+2\sqrt{2}+6(\sqrt{2}+1)^2}{3}\ell^3=\frac{3+2\sqrt{2}+6(2+1+2\sqrt{2})}{3}\ell^3=$$

$$=\frac{3+2\sqrt{2}+18+12\sqrt{2}}{3}\ell^3=\frac{21+14\sqrt{2}}{3}\ell^3=\boxed{\frac{7(3+2\sqrt{2})}{3}\ell^3}=13,59\,96\,63\,28..\ell^3$$

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por el acoplamiento de 8 triángulos equiláteros de lado $\ell = 30,9$ mm y 6 octógonos regulares, también de lado "ℓ". El acoplamiento deberá hacerse de forma que en cada vértice concurran 2 octógonos y un triángulo.

En el cuadro sinóptico que damos a continuación, están resumidos los resultados analíticos obtenidos anteriormente.

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{\sqrt{7+4\sqrt{2}}}{2}\,\ell$	$1.77\ 88\ 24\ldots\ell$
b	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}\,\ell$	$1.70\ 71\ 07\ldots\ell$
c_3	$\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{6}\,\ell$	$1.68\ 25\ 92\ldots\ell$
c_8	$\frac{\sqrt{2}+1}{2}\,\ell$	$1,21\ 21\ 07\ldots\ell$
d_3	$\frac{\sqrt{3}}{3}\,\ell$	$0,57\ 73\ 50\ldots\ell$
d_8	$\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}\,\ell$	$1,30\ 65\ 63\ldots\ell$
m	$\sqrt{\frac{10+4\sqrt{2}}{17}}\,\ell$	$0,95\ 96\ 83\ldots\ell$
α_3	$\operatorname{tg}\alpha_3 = 3+2\sqrt{2}$	$\operatorname{tg}\alpha_3 = 5,82\ 84\ 27\ldots$ $\alpha_3 = 80^\circ\ 15'\ 51,8''$
α_8	$\operatorname{tg}\alpha_8 = 1$	$\alpha_8 = 45^\circ$
φ_{3-8}	$\operatorname{tg}\varphi_{3-8} = -\sqrt{2}$	$\operatorname{tg}\varphi_{3-8} = -1,41\ 42\ 14\ldots$ $\varphi_{3-8} = 125^\circ\ 15'\ 51,8''$
φ_{8-8}	$\operatorname{tg}\varphi_{8-8} = \infty$	$\varphi_{8-8} = 90^\circ$
S	$2(\sqrt{3}+6\sqrt{2}+6)\,\ell^2$	$32,43\ 46\ 64\ldots\ell^2$
V	$\frac{7(3+2\sqrt{2})}{3}\,\ell^3$	$13.59\ 96\ 63\ldots\ell^3$

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

Después del cálculo de las magnitudes principales, vamos a proceder, en la lámina 40, a la representación gráfica del Arquimediano VIII.

Para su trazado nos valdremos de cotas calculadas por las fórmulas anteriores, y de procesos gráficos.

Con este objeto, calculemos previamente las siguientes magnitudes:

l_{VIII} = Dato del ejercicio = 30.9 mm

a = 1.77 88 24 ... × 30.92 = 55.0 mm

b = 1.70 71 07 ... × 30.92 = 52.8 mm

c_3 = 1.68 25 92 ... × 30 92 = 52.0 mm

c_8 = 1.21 21 07 ... × 30.92 = 37.5 mm

d_3 = 0.57 73 50 ... × 30.92 = 17.9 mm

d_8 = 1.30 65 63 ... × 30.92 = 40.4 mm

El orden de operaciones del trazado gráfico (lám. 40), es el siguiente:

1º Situar el centro O, de coordenadas O (72, 72, 85) mm.

2º Dibujar en I, II y III, las proyecciones de la esfera circunscrita, de radio a = 55,0 mm.

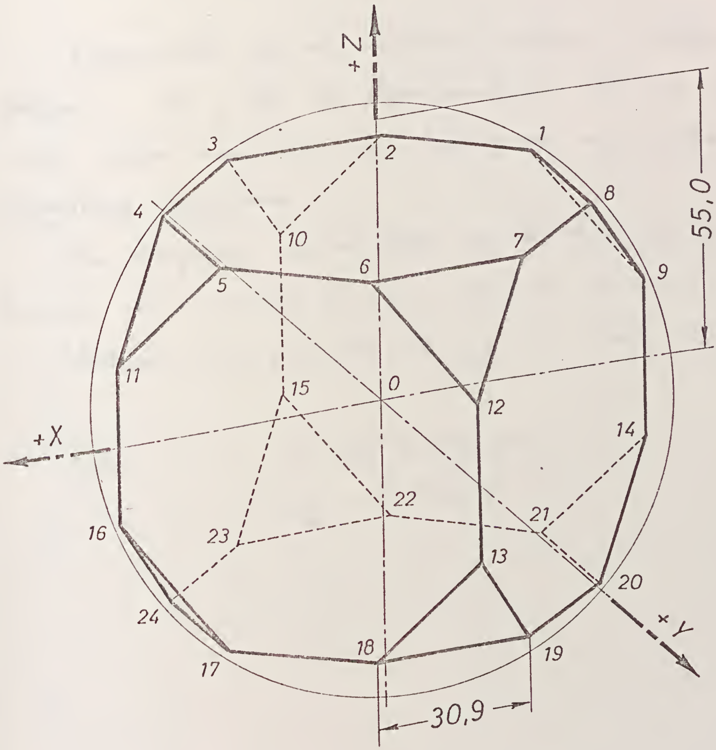
3º Representar en I, II y III las caras octogonales superior 1 al 8 y la inferior 17 al 24, supuesto el poliedro colocado con dichas caras paralelas a II, y un

lado perpendicular a I (utilícese la cota "c_8" en I y III, y la d_8 en II).

4° Obtener en I, II y III, las proyecciones de las aristas 9-14, 10-15, 11-16 y 12-13, perpendiculares a II, que en esta proyección se reducen a un punto cada una; estos puntos son vértices de un cuadrado, prolongación de los lados 3-4, 5-6, 7-8, 1-2 (en II). En I y III dichas aristas son perpendiculares a los ejes X e Y respectivamente y sus extremos equidistan del plano diametral paralelo a II.

Con las anteriores construcciones puede completarse las representaciones en I, II y III del mencionado arquimediano, con una ordenada unión de los vértices obtenidos.

Como comprobación del trazado, obsérvese que los vértices 9, 11, 14 y 16 en II, y los 10, 12, 13, 15 en III, deben quedar situados en los respectivos contornos aparentes de la esfera circunscrita (radio a = 55,0 mm).



Arquimediano VIII

Lámina 41	Poliedros arquimedianos Arquimediano IX ($1 P_3 + 2 P_{10}$)	41

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el Arquimediano IX, en el que en cada vértice concurren un triángulo equilátero y dos decágonos regulares.

La longitud de su lado es de 18,5 mm, y las coordenadas de su centro O, son (72, 72, 85) mm.

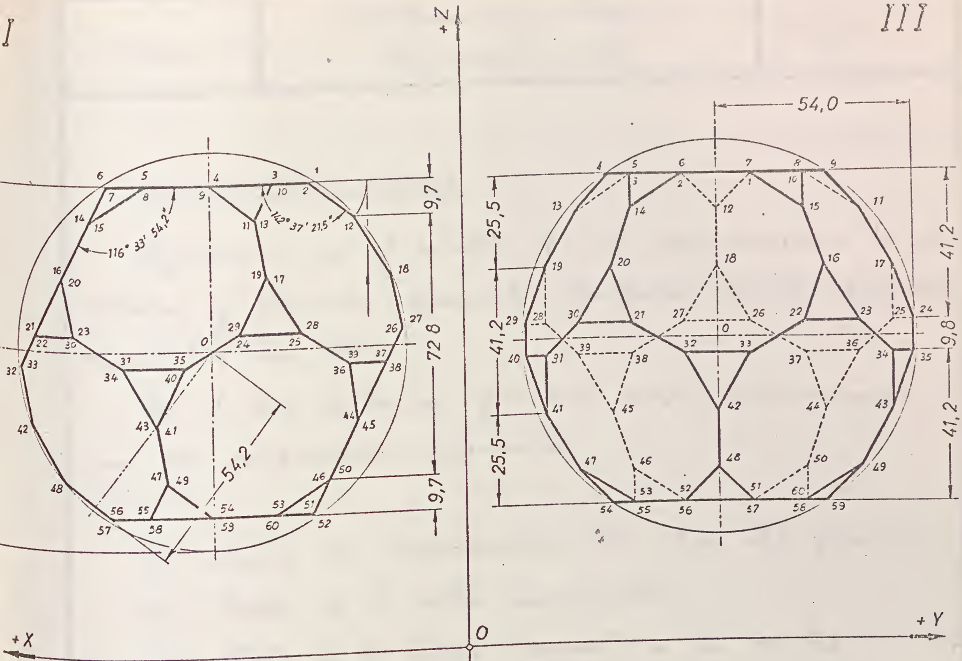
Dibujar en formato A3V y a escala 1:1.

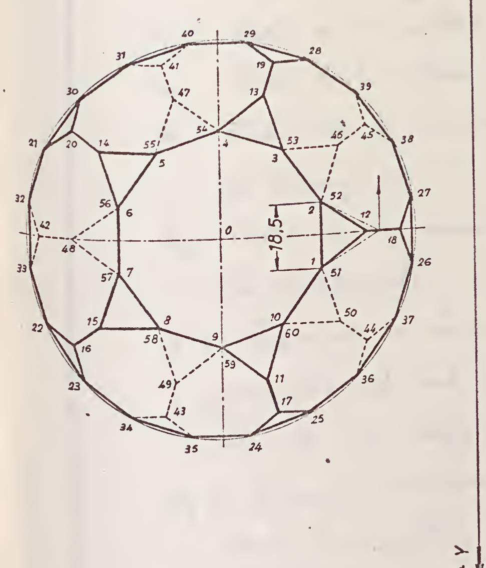
DATOS O (72, 72, 85) mm

l_{IX} = 18,5 mm

l = 18,53

22 - 4 - 73





ARQUIMEDIANO IX

Número de caras triangulares............	C_3 = 20
Número de caras decagonales............	C_{10} = 12
Número de vértices..........................	V = 60
Número de aristas...........................	A = 90
Número de caras de un ángulo sólido...	1 P_3 + 2 P_{10}

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el Arquimediano IX, en el que en cada vértice concurren un triángulo equilátero y dos decágonos regulares.

La longitud de su lado es de 18,5 milímetros y las coordenadas de su centro O, son O (72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela / Curso
Fecha:						
Alumno:						
Escala 1:1	Arquimediano IX					Lámina 41 / Curso 19 - 19

CONSIDERACIONES PREVIAS

Seguiremos, en el estudio de este arquimediano, las directrices y fórmulas generales planteadas en el "Arquimediano I (lám. 33).

En el caso particular que nos ocupa, determinaremos las magnitudes siguientes:

l: Arista del Arquimediano IX (dato del ejercicio).

a : Radio de la esfera circunscrita.

b = Radio de la esfera tangente a las aristas.

c_3 = Radio de la esfera tangente a las caras triangulares.

c_{10} = Radio de la esfera tangente a las caras decagonales.

d_3 = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara triangular.

d_{10} = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara decagonal.

m = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las aristas de un ángulo sólido.

α_3 = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara triangular, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.

α_{10} = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara decagonal, con el plano diametral del ar-

quimediano que pasa por una arista de aquélla.

φ_{3-10} = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara triangular y otra decagonal.

φ_{10-10} = Angulo rectilíneo del diedro formado por dos caras decagonales.

S = Superficie

V = Volumen.

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

El estudio realizado de este arquimediano, nos indica que se compone de 20 caras triangulares y 12 caras decagonales; 60 vértices y 90 aristas.

En cada vértice concurren un triángulo y dos decágonos, todos regulares.

Así pues, tendremos que

$$\boxed{\text{ARQUIMEDIANO IX } \left(1\,P_3 + 2\,P_{10}\right);\quad C_3 = 20;\quad C_{10} = 12;\quad V = 60;\quad A = 90}$$

Cálculo de sus magnitudes

Arista "l" del arquimediano

Dato del ejercicio

Radio "m" de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las tres aristas que concurren en un ángulo sólido.

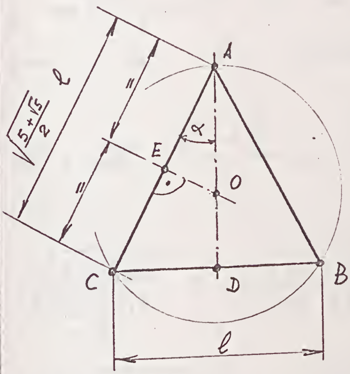


Figura 1

Dicho polígono (fig. 1), es un triángulo isósceles, cuya base $\overline{BC}$ es la arista "ℓ" del arquimediano (lado de la cara triangular), y sus otros dos lados iguales $\overline{AC} = \overline{AB}$, corresponden a la diagonal del decágono de lado "ℓ" que une los extremos de dos lados consecutivos.

Se demuestra en Geometría que el lado "ℓ_{10}" de un decágono regular, inscrito en una circunferencia de radio "R," tiene el valor de

$$\ell_{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} R \qquad [1]$$

Igualmente, el lado "ℓ_5" de un pentágono regular, en función de "R" es a su vez

$$\ell_5 = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2} R \qquad [2]$$

Como la diagonal de un decágono regular que une los extremos de dos lados consecutivos del mismo, es un pentágono regular, ambos inscritos en una

misma circunferencia, tendremos que [2]

$$\overline{AC} = l_5 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}\ R$$

y sustituyendo "R" por su valor obtenido de [1], en la que $l_{10} = l$, tendremos

$$\overline{AC} = \overline{AB} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}\ R = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{5}-1} \times l = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}\ l =$$

$$= \sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{(\sqrt{5}-1)^2}}\ l = \sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{5+1-2\sqrt{5}}} \times l = \sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{6-2\sqrt{5}}} \times l = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{4}} \times l = \sqrt{\frac{15-3\sqrt{5}+5\sqrt{5}-5}{4}} \times l = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{4}} \times l = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \times l$$

De la figura se deduce:

$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\ l\right)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{4}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}-1}{4}} \times l = \sqrt{\frac{9+2\sqrt{5}}{4}} \times l = \frac{\sqrt{9+2\sqrt{5}}}{2} \times l$$ por lo que será:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{9+2\sqrt{5}}}{2}\ l : \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\ l = \frac{1}{2}\sqrt{(9+2\sqrt{5}) : \frac{5+\sqrt{5}}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(9+2\sqrt{5})}{5+\sqrt{5}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(9+2\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{20}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{45+10\sqrt{5}-9\sqrt{5}-10}{10}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{35+\sqrt{5}}{10}} = \sqrt{\frac{35+\sqrt{5}}{40}}$$ y en consecuencia

$$\overline{AO} = \boxed{m} = \frac{\overline{AE}}{\cos\alpha} = \frac{\overline{AC}}{2\cos\alpha} = \sqrt{\frac{5+\sqrt5}{2}}\,\ell : 2\sqrt{\frac{35+\sqrt5}{40}} =$$

$$= \sqrt{\frac{5+\sqrt5}{2} : \frac{35+\sqrt5}{10}} \times \ell = \sqrt{\frac{(5+\sqrt5)\times 10}{(35+\sqrt5)\times 2}} \times \ell = \sqrt{\frac{5\,(5+\sqrt5)\,(35-\sqrt5)}{35^2-5}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{5\times 35 + 35\sqrt5 - 5\sqrt5 - 5}{35\times 7 - 1}} \times \ell = \sqrt{\frac{170+30\sqrt5}{244}} \times \ell = \sqrt{\frac{85+15\sqrt5}{122}} \times \ell =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{5\,(17+3\sqrt5)}{122}} \times \ell} = 0{,}98\,57\,21\,90\ldots\ \ell$$

Para el caso del dibujo, será: $m = 0{,}98\,57\,21\,9\ldots \times 18{,}53 = 18{,}3$ mm.

Radio "a" de la esfera circunscrita

Se obtiene aplicando la fórmula general [1] (ver lám. 33)

$$\boxed{a} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - m^2}} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - \left(\sqrt{\frac{5(17+3\sqrt5)}{122}}\,\ell\right)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{5(17+3\sqrt5)}{122}}} \times \ell =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{122-85-15\sqrt5}{122}}} \times \ell = \frac{1}{2\sqrt{\frac{37-15\sqrt5}{122}}} \times \ell = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{122}{37-15\sqrt5}} \times \ell =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{122\times(37+15\sqrt5)}{37^2-15^2\times 5}} \times \ell = \sqrt{\frac{122\,(37+15\sqrt5)}{244}} \times \ell = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{37+15\sqrt5}{2}} \times \ell =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{37+15\sqrt5}{8}} \times \ell} = 2{,}96\,94\,49\,01\ldots\ \ell$$

$\ell = 18{,}52\,19\,5 \simeq 18{,}53$ mm

Para el caso del dibujo, será: $\underline{a = 55{,}0 \text{ mm}}$

Lámina 41	Poliedros arquimedianos Arquimediano IX	Hoja nº 6

Radio "b" de la esfera tangente a las aristas

Se obtiene aplicando la fórmula general [3] (ver lám. 33).

$$\boxed{b} = \sqrt{a^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{37+15\sqrt{5}}{8}}\times\ell\right)^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{\frac{37+15\sqrt{5}}{8} - \frac{1}{4}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{37+15\sqrt{5}-2}{8}} \times \ell = \sqrt{\frac{35+15\sqrt{5}}{8}} \times \ell = \sqrt{\frac{5\times(7+3\sqrt{5})}{8}} \times \ell = \sqrt{\frac{5}{8}} \times \sqrt{7+3\sqrt{5}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{5}{8}} \times \left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}\right) \times \ell = \left(\sqrt{\frac{45}{16}} + \sqrt{\frac{25}{16}}\right) \times \ell = \left(\frac{3\sqrt{5}}{4} + \frac{5}{4}\right) \ell = \boxed{\frac{3\sqrt{5}+5}{4} \times \ell} =$$

$$= 2{,}92\ 70\ 50\ 98 \ldots \ell$$

Para el caso del dibujo, será: $b = 2{,}92\ 70\ 52\ 98.. \times 18{,}53 = 54.2$ mm

---

Radio "d_3" de la circunferencia circunscrita a una cara triangular

Se demuestra en Geometría, es:

$$\boxed{d_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}\ \ell} = 0{,}57\ 73\ 50\ 27 \ldots \ell$$

Para el caso del dibujo, será: $d_3 = 0{,}57\ 73\ 50\ 29.. \times 18{,}53 = 10.7$ mm

---

Radio "d_{10}" de la circunferencia circunscrita a una cara dicagonal

Se demuestra en Geometría, es:

(firma)		22 - 2 - 73

$$\boxed{d_{10} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\,\ell} = 1,61\,80\,33\,99\ldots\,\ell$$

Para el caso del dibujo, será: $d_{10} = 1,61\,80\,33\,99.. \times 18,53 = 30,0$ mm.

Radio "c_3" de la esfera tangente a las caras triangulares de lado "ℓ".

Aplicando la fórmula general [2] (ver lám. 33),

$$\boxed{c_3} = \sqrt{a^2-(d_3)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{37+15\sqrt{5}}{8}}\times\ell\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\ell\right)^2} = \sqrt{\frac{37+15\sqrt{5}}{8}-\frac{1}{3}}\times\ell =$$

$$= \sqrt{\frac{111+45\sqrt{5}-8}{24}}\times\ell = \sqrt{\frac{103+45\sqrt{5}}{24}}\times\ell = \frac{\sqrt{103+45\sqrt{5}}}{\sqrt{24}}\times\ell = \frac{\sqrt{\frac{125}{2}}+\sqrt{\frac{81}{2}}}{\sqrt{24}}\,\ell =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{125}{48}}+\sqrt{\frac{81}{48}}\right)\ell = \left(\frac{5\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}+\frac{9}{4\sqrt{3}}\right)\ell = \left(\frac{5\sqrt{5}+9}{4\sqrt{3}}\right)\ell = \boxed{\frac{5\sqrt{15}+9\sqrt{3}}{12}\,\ell} =$$

$$= 2,91\,27\,81\,17\ldots\,\ell$$

Para el caso del dibujo, será:

$c_3 = 2,91\,27\,81\,17\ldots\times 18,53 = 54,0$ mm.

Radio "c_{10}" de la esfera tangente a las caras decagonales de lado "ℓ"

Aplicando la fórmula general [2] (ver lám. 33),

$$\boxed{c_{10}} = \sqrt{a^2-(d_{10})^2} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{37+15\sqrt{5}}{8}}\times\ell\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\,\ell\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{37+15\sqrt{5}}{8}-\frac{5+1+2\sqrt{5}}{4}}\times\ell = \sqrt{\frac{37+15\sqrt{5}}{8}-\frac{6+2\sqrt{5}}{4}}\times\ell =$$

$$= \sqrt{\frac{37 + 15\sqrt{5} - 12 - 4\sqrt{5}}{8}} \times \ell = \boxed{\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{8}} \times \ell} = 2,48\,98\,98\,3 \ldots \ell$$

Para el caso del dibujo, será: $c_{10} = 2,48\,98\,98\,3.. \times 18,53 = 46,1$ mm

---

<u>Angulo rectilíneo "α_3" del diedro formado por una cara triangular, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.</u>

Se obtiene, en función de su tangente, por la fórmula general [5] (ver lám. 33).

$$\boxed{tg\ \alpha_3} = \frac{2\,c_3}{\sqrt{4\,(d_3)^2 - \ell^2}} = \frac{2 \times \frac{5\sqrt{15} + 9\sqrt{3}}{12}\,\ell}{\sqrt{4\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\,\ell\right)^2 - \ell^2}} = \frac{5\sqrt{15} + 9\sqrt{3}}{6\sqrt{4 \times \frac{1}{3} - 1}} =$$

$$= \frac{5\sqrt{15} + 9\sqrt{3}}{6\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{(5\sqrt{15} + 9\sqrt{3}) \times \sqrt{3}}{6} = \frac{5\sqrt{45} + 9 \times 3}{6} = \frac{15\sqrt{5} + 27}{6} =$$

$$= \boxed{\frac{5\sqrt{5} + 9}{2}} = 10,09\,01\,69\,95 \ldots$$

$lg\ tg\ \alpha_3 = 1,00\,38\,98\,5$ $\qquad \boxed{\alpha_3 = 84^\circ\ 20'\ 24,4''}$

<u>Angulo rectilíneo "α_{10}" del diedro formado por una cara decagonal, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.</u>

Se obtiene, en función de su tangente, por la fórmula general [6] (ver lám. 33).

$$\boxed{tg\ \alpha_{10}} = \frac{2\ c_{10}}{\sqrt{4\ (d_{10})^2 - \ell^2}} = \frac{2\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{8}} \times \ell}{\sqrt{4\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\ell\right)^2 - \ell^2}} = \frac{\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{2}}}{\sqrt{4 \times \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4} - 1}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{2}}}{\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2 - 1}} = \frac{\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{2}}}{\sqrt{5+1+2\sqrt{5}-1}} = \frac{\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{2}}}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{2(5+2\sqrt{5})}} = \sqrt{\frac{(25+11\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})}{2\ (25-20)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{125+55\sqrt{5}-50\sqrt{5}-110}{10}} = \sqrt{\frac{15+5\sqrt{5}}{10}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{5}{4}} + \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = 1,61\ 80\ 33\ 99\ldots$$

$$\lg\ tg\ \alpha_{10} = 0,20\ 89\ 87\ 6 \qquad \boxed{\alpha_{10} = 58^\circ\ 16'\ 57,1''}$$

Angulo rectilíneo "$\varphi_{3\text{-}10}$" del diedro formado por una cara triangular y otra decagonal, ambas regulares.

Aplicando la fórmula general [4], (ver lám. 33)

$$\boxed{\varphi_{3\text{-}10}} = \alpha_3 + \alpha_{10} = 84^\circ\ 20'\ 24,4'' + 58^\circ\ 16'\ 57,1'' =$$

$$= \boxed{142^\circ\ 37'\ 21,5''}$$

Puede obtenerse directamente de la siguiente manera:

$$\boxed{tg\ \varphi_{3\text{-}10}} = tg\ (\alpha_3 + \alpha_{10}) = \frac{tg\ \alpha_3 + tg\ \alpha_{10}}{1 - tg\ \alpha_3 \times tg\ \alpha_{10}} = \frac{\frac{5\sqrt{5}+9}{2} + \frac{\sqrt{5}+1}{2}}{1 - \frac{5\sqrt{5}+9}{2} \times \frac{\sqrt{5}+1}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{6\sqrt{5}+10}{2}}{1-\frac{25+9\sqrt{5}+5\sqrt{5}+9}{4}} = \frac{3\sqrt{5}+5}{1-\frac{34+14\sqrt{5}}{4}} = \frac{3\sqrt{5}+5}{\frac{4-34-14\sqrt{5}}{4}} = \frac{4(3\sqrt{5}+5)}{-30-14\sqrt{5}} =$$

$$= -\frac{2(3\sqrt{5}+5)}{15+7\sqrt{5}} = -\frac{2(3\sqrt{5}+5)(7\sqrt{5}-15)}{49\times 5-15^2} = -\frac{2(105+35\sqrt{5}-45\sqrt{5}-75)}{20} =$$

$$= -\frac{30-10\sqrt{5}}{10} = \boxed{-(3-\sqrt{5})} = -0{,}76\ 39\ 32\ 02\ldots$$

y haciendo $\alpha_0 = \pi - \varphi_{3-10}$, será $tg\,\alpha_0 = -tg\,\varphi_{3-10} =$

$$= -\left(-(3-\sqrt{5})\right) = 3-\sqrt{5} = 0{,}76\ 39\ 32\ 02\ldots$$ de donde

$lg\ tg\,\alpha_0 = \bar{1},88\ 30\ 54\ 8$ $\qquad \alpha_0 = 37^\circ\ 22'\ 38{,}5''$

$$\boxed{\varphi_{3-10}} = 180^\circ - 37^\circ\ 22'\ 38{,}5'' = \boxed{142^\circ\ 37'\ 21{,}5''}$$

valor coincidente con el ya obtenido

Angulo rectilíneo "φ_{10-10}" del diedro formado por dos caras decagonales.

Aplicando la fórmula general [4] (ver lám. 33)

$$\boxed{\varphi_{10-10}} = \alpha_{10} + \alpha_{10} = 2\,\alpha_{10} = 2\times(58^\circ\ 16'\ 57{,}1'') =$$

$$= \boxed{116^\circ\ 33'\ 54{,}2''}$$

Puede obtenerse directamente su tangente, de la siguiente manera:

$$\boxed{\operatorname{tg} \varphi_{10-10}} = \operatorname{tg} 2\alpha_{10} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha_{10}}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha_{10}} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{5}+1}{2}}{1 - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}+1}{1 - \frac{5+1+2\sqrt{5}}{4}} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{\frac{4 - 6 - 2\sqrt{5}}{4}} = \frac{4(\sqrt{5}+1)}{-2-2\sqrt{5}} = -\frac{4(\sqrt{5}+1)}{2(\sqrt{5}+1)} = \boxed{-2}$$

y haciendo $\alpha_0 = \pi - \varphi_{10-10}$, será

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = -\operatorname{tg} \varphi_{10-10} = -(-2) = 2$$

$$\lg . \operatorname{tg} \alpha_0 = \lg 2 = 0.30\,10\,30\,0 \qquad \alpha_0 = 63^\circ\ 26'\ 5{,}8''$$

de donde $\boxed{\varphi_{10-10}} = 180^\circ - 63^\circ\ 26'\ 5{,}8'' =$

$$= \boxed{116^\circ\ 33'\ 54{,}2''}$$

valor coincidente con el ya obtenido.

NOTA.- El valor del diedro φ_{10-10} es el mismo que el del dodecaedro regular (ver lám. 4, fórm. 34) lo cual nos indica que este arquimediano puede obtenerse de dicho dodecaedro correspondiendo las caras pentagonales de éste con las decagonales de aquél.

Area lateral "S" del arquimediano

Se compone de la suma de 20 caras triangulares y 12 caras decagonales, ambas regulares y de igual lado "l"

La apotema "k" de un decágono regular de lado "l" y radio "d_{10}" de su circunferencia circunscrita, será:

$$k = \sqrt{(d_{10})^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\, l\right)^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4} - \frac{1}{4}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{5+1+2\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4}} \times l = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}-1}{4}} \times l = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2} \times l.$$

y el área lateral "S", será:

$$\boxed{S} = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{4}\, l^2 + 12 \times \frac{10\, l}{2} \times \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2} \times l = \boxed{\left(5\sqrt{3} + 30\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right) l^2} =$$

$$= (8{,}66\ 02\ 54\ 04.. + 92{,}33\ 05\ \overset{06\ 11}{\cancel{05\ 90}})\, l^2 = \boxed{100{,}\ 99\ 07\ \overset{60\ 15}{\cancel{59\ 94}} \ldots\ l^2}$$

Volumen "V" del arquimediano

Se compone de la suma de 20 pirámides triangulares regulares de lado "l" y altura "c_3", y de 12 pirámides decagonales de lado "l" y altura "c_{10}". Su volumen será pues:

$$\boxed{V} = 5\sqrt{3}\, l^2 \times \frac{c_3}{3} + 30\sqrt{5+2\sqrt{5}}\, l^2 \times \frac{c_{10}}{3} =$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{3} \times \frac{5\sqrt{15} + 9\sqrt{3}}{12}\, l^3 + 10\sqrt{5+2\sqrt{5}} \times \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{8}} \times l^3 =$$

$$= \left[\frac{5}{36}(15\sqrt{5} + 27) + 10\sqrt{\frac{(25+11\sqrt{5})(5+2\sqrt{5})}{8}}\right] \times l^3 = \left[\frac{5(5\sqrt{5}+9)}{12} + \right.$$

$$+5\sqrt{\frac{125+55\sqrt{5}+50\sqrt{5}+110}{2}}\Bigg]\times \ell^3=\left[\frac{25\sqrt{5}+45}{12}+5\sqrt{\frac{325+105\sqrt{5}}{2}}\right]\times \ell^3=$$

$$=\left[\frac{25\sqrt{5}+45}{12}+5\sqrt{\frac{5(47+21\sqrt{5})}{2}}\right]\times \ell^3=\left(\frac{25\sqrt{5}+45}{12}+5\sqrt{\frac{5}{2}}\times\sqrt{47+21\sqrt{5}}\right)\ell^3=$$

$$=\left(\frac{25\sqrt{5}+45}{12}+5\times\sqrt{\frac{5}{2}}\left(\sqrt{\frac{49}{2}}+\sqrt{\frac{45}{2}}\right)\right)\times \ell^3=\left(\frac{25\sqrt{5}+45}{12}+5\left(\sqrt{\frac{5\times 7^2}{2^2}}+\sqrt{\frac{5^2\times 3^2}{2^2}}\right)\right)\times \ell^3=$$

$$=\left(\frac{25\sqrt{5}+45}{12}+\frac{35\sqrt{5}}{2}+\frac{75}{2}\right)\times \ell^3=\left(\frac{25\sqrt{5}+45+210\sqrt{5}+450}{12}\right)\times \ell^3=$$

$$=\boxed{\frac{495+235\sqrt{5}}{12}\ \ell^3}=85,03\ 76\ 64\ 5\overset{8}{\cancel{6}}\ldots\ \ell^3$$

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por el acoplamiento de 20 triángulos equiláteros, de lado $\ell = 18,5$ mm, y 12 decágonos regulares de igual lado. El acoplamiento deberá hacerse de forma que en cada vértice concurran 2 decágonos y un triángulo.

En el cuadro sinóptico que damos a continuación, están resumidos los resultados analíticos obtenidos anteriormente.

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\sqrt{\frac{37 + 15\sqrt{5}}{8}}\ \ell$	2, 96 94 49....ℓ
b	$\frac{3\sqrt{5} + 5}{4}\ \ell$	2, 92 70 51....ℓ
c_3	$\frac{5\sqrt{15} + 9\sqrt{3}}{12}\ \ell$	2, 91 27 81....ℓ
c_{10}	$\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{8}}\ \ell$	2, 48 98 98....ℓ
d_3	$\frac{\sqrt{3}}{3}\ \ell$	0, 57 73 51....ℓ
d_{10}	$\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\ \ell$	1, 61 80 34....ℓ
m	$\sqrt{\frac{5 * (17 + 3\sqrt{5})}{122}}\ \ell$	0, 98 57 22....ℓ
α_3	$tg\ \alpha_3 = \frac{5\sqrt{5} + 9}{2}$	$tg.\ \alpha_3 =$ 10, 09 01 70 $\alpha_3 = 84°\ 20'\ 24,4''$
α_{10}	$tg\ \alpha_{10} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$	$tg\ \alpha_{10} =$ 1, 61 80 34 $\alpha_{10} = 58°\ 16'\ 57,1''$
φ_{3-10}	$tg\ \varphi_{3-10} = -(3 - \sqrt{5})$	$tg\ \varphi_{3-10} = -$ 0, 76 39 32 $\varphi_{3-10} = 142°\ 37'\ 21,5''$
φ_{10-10}	$tg\ \varphi_{10-10} = -2$	$\varphi_{10-10} = 116°\ 33'\ 54,2''$
S	$(5\sqrt{3} + 30\sqrt{5 + 2\sqrt{5}})\ \ell^2$	100, 99 07 60....ℓ^2
V	$\frac{495 + 235\sqrt{5}}{12}\ \ell^3$	85, 03 96 65....ℓ^3

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

Después del cálculo de las magnitudes principales, vamos a proceder en la lámina 41, a la representación gráfica del Arquimediano IX.

Para su trazado nos valdremos de cotas calculadas por las fórmulas anteriores, de procesos gráficos y de cotas complementarias, cuyo cálculo efectuaremos posteriormente. Todas las magnitudes las obtendremos en función del lado "l_{IX}" del arquimediano, cuya longitud es de 18,5 mm.

Con este objeto, calculemos previamente las siguientes magnitudes:

l_{IX} = Dato del ejercicio = 18,5 mm

a = 2,96 94 49... × 18,5 = 55,0 mm

b = 2,92 70 51... × 18,5 = 54,2 mm

c_3 = 2,91 27 81... × 18,5 = 54,0 mm

c_{10} = 2,48 98 98... × 18,5 = 46,1 mm

d_3 = 0,57 73 51... × 18,5 = 10,7 mm

d_{10} = 1,61 80 34... × 18,5 = 30,0 mm

Antes de proceder al trazado gráfico, observemos en la lámina 41 que la proyección del arquimediano en el plano II, presenta una forma muy regular que facilita notablemente su trazado.

Las propiedades geométricas de ella, son:

1) Las caras 1 al 10 y 51 al 60, son decágonos regulares coincidentes, de lado "l" y radio "d_{10}" de su

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

circunferencia circunscrita.

2) Los vértices 11 al 15 y 46 al 50, lo son de otro decágono regular de vértices alternados con el anterior; el radio de su circunferencia circunscrita es el "r_1".

3) Los vértices 16 al 20 y 41 al 45 también lo son de un decágono regular, de lados paralelos al anterior; el radio de su circunferencia circunscrita es el "r_2".

4) Los vértices 21 al 30 y 31 al 40 forman un polígono, no regular, que es el contorno aparente de la proyección sobre II del arquimediano. Dicho polígono está inscrito en una circunferencia de radio "r_3". Los lados 22-23, 24-25, 26-27, 28-29, 30-21, así como los 32-33, 34-35, 36-37, 38-39 y 40-31, tienen la longitud "l" de la arista, por ser todas paralelas a II; las rectas que unen sus puntos medios con el centro 0, son coincidentes con las que unen los vértices 16 al 20 y 41 al 45, con el mismo centro.

Las propiedades anteriores permiten el trazado inmediato de la proyección total del arquimediano sobre el plano II, calculando previamente los radios "r_1", "r_2" y "r_3"

Teniendo presente lo expuesto, el orden de operaciones del trazado gráfico (lam. 41), es el siguiente:

Lámina 41	Poliedros arquimedianos Arquimediano IX	Hoja nº 17

1º Situar el centro O, de coordenadas 72, 72, 85 mm.

2º Dibujar en I, II y III las proyecciones de la esfera circunscrita, de radio 55 mm.

3º Representar en I, II y III las caras decagonales opuestas 1 al 10 y 51 al 60, supuesto el poliedro colocado con dichas caras paralelas a II y uno de sus lados (1-2 en la superior y 51-52 en la inferior) perpendiculares a I. Para obtener las proyecciones de ambas en II (son coincidentes), dibujar la circunferencia circunscrita de radio "d_{10}" y dividirla en 10 partes iguales; uniendo los puntos de división se obtendrá un decágono regular de lado "l" (comprobación). Las proyecciones de dichas dos caras en I y III son rectas paralelas al eje X equidistantes de O la magnitud "C_{10}"; la magnitud del segmento se deduce de II (son diferentes en I y III)

4º Completar en II, la proyección del arquimediano, y proceder (teniendo en cuenta las propiedades enunciadas al principio) y proceder como sigue:

a) Trazar una circunferencia de radio "r_1" (y centro O_{II},) y dividirla en 10 partes iguales, tomando como origen el vértice 48; estos puntos de división nos darán los vértices 11 al 15 y 46 al 50.

b) Trazar una segunda circunferencia, de igual centro y radio "r_2", que se dividirá también en 10 partes iguales

[signature]		25 - 4 - 73

tomando como origen el vértice 42; estos puntos de división nos darán los vértices 16 al 20 y 41 al 45.

c) Trazar otra circunferencia de centro O_{II} y radio "r_3"; unir los vértices 16 al 20 y 41 al 45, con el centro O (estos radios pasarán por los vértices ya obtenidos 11 al 15 y 46 al 50). Trazar paralelas a ambos lados de cada radio, a la distancia $\frac{l}{2}$, que al cortar a la circunferencia anterior nos determinarán los restantes vértices de esta proyección, nº 21 al 30 y 31 al 40.

5º Obtenida la proyección en II, completaremos la de I, trazando previamente por O_I y equidistantes de él, paralelas hacia arriba y hacia abajo, a las distancias $f_1:2$, $f_2:2$ y $f_3:2$, sobre las que se encontrarán respectivamente las proyecciones de los vértices 11 al 15, 46 al 50 en las primeras, 16 al 20, 41 al 45 en las segundas, y 21 al 30, 31 al 40 en las terceras. La posición de estos vértices se obtiene de la II. (comprobar que los vértices 12, 18, 42, 48 están sobre el contorno aparente de la esfera circunscrita).

6º Completar la proyección en III, auxiliándose de las obtenidas en I y II.

Como comprobación y necesaria ayuda para el trazado gráfico dado anteriormente, vamos a determinar analíticamente las siguientes magnitudes complementarias que

darán mayor exactitud a dicho trazado.

Altura "n" de una cara triangular

Se demuestra en Geometría, es

$$\boxed{n = \frac{\sqrt{3}}{2}\, l} = 0{,}86\ 60\ 25\ 4 \dots l$$

Apotema "k" de una cara decagonal

Su valor, deducido anteriormente (ver pág. 12), es

$$\boxed{k = \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{2}\, l} = 1{,}53\ 88\ 41\ 76 \dots l$$

Distancia "g_1" de los vértices 11 al 15 al plano de la cara decagonal 1 al 10, y de los vértices 46 al 50 a la cara decagonal 51 al 60

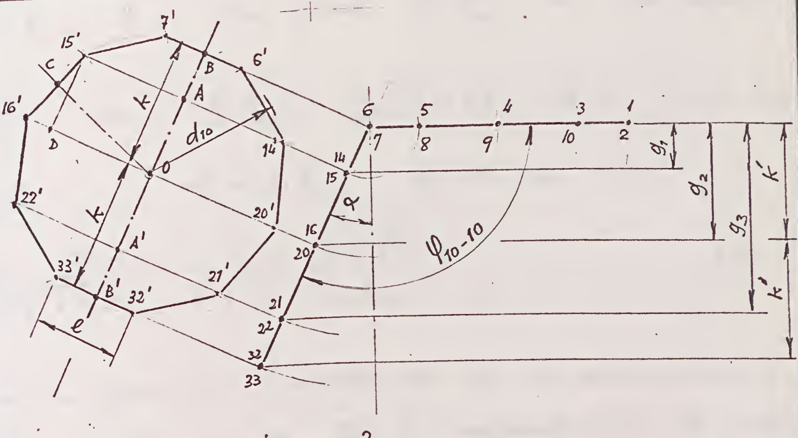


Figura 2

Consideremos (fig. 2) la cara superior decagonal 1 al 10 y la contigua (también decagonal) 6-14-20-21-32-33-22-16-15-7, proyectadas ambas sobre el plano I (ver lám. 41). Por ser los planos de ambas, perpendiculares a I, sus proyecciones serán segmentos rectilíneos que forman entre sí un ángulo φ_{10-10}, que es el del diedro de ambas caras. Supongamos rebatida sobre el plano del dibujo la cara 6-14.... 15-7, tomando como charnela la proyección rectilínea, con lo cual obtenemos la verdadera magnitud 6'-14'... 15'-7' de dicho polígono.

El proceso a seguir para determinar las magnitudes "g_1", "g_2" y "g_3" consiste en proyectar dos segmentos correspondientes $\overline{BA}$, $\overline{BO}$ y $\overline{BA'}$ sobre el plano $\underline{III}$, siendo "α" el ángulo de proyección, cuyo valor es

$$\alpha = \varphi_{10-10} - \frac{\pi}{2}$$ pero siendo $\operatorname{tg} \varphi_{10-10} = -2$ (ver estudio anterior), será $\operatorname{tg} \varphi_{10-10} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha$ y por consiguiente $\operatorname{ctg} \alpha = 2$, por lo que será

$$\boxed{\cos \alpha} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \frac{2}{\sqrt{1 + 2^2}} = \boxed{\frac{2\sqrt{5}}{5}} \qquad [1]$$

Si en la figura 2, trazamos por 0, la perpendicular al lado 15'-16', y por 15' la perpendicular al radio 0-16', se nos formarán dos triángulos rectángulos

0-C-16' y 15'-D-16' que son semejantes (tienen un ángulo agudo común), por lo que se verificará que

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{0\text{-}16'}} = \frac{\overline{15'\text{-}D}}{15'\text{-}16'} \quad \text{de donde} \quad 15'\text{-}D = \boxed{\overline{AO}} = \frac{(15'\text{-}16') \times \overline{OC}}{(0\text{-}16')} =$$

$$= \frac{\ell \times k}{d_{10}} = \left(\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}\,\ell : \frac{\sqrt{5}+1}{2}\,\ell\right) \times \ell = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1} \times \ell =$$

$$= \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}} \times (\sqrt{5}-1)}{4}\,\ell = \frac{\sqrt{(5+2\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)^2}}{4}\,\ell = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})}{16}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{8}} \times \ell = \sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}-5\sqrt{5}-10}{8}}\,\ell = \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\,\ell}$$

De la figura 2, se deduce que

$$\boxed{\overline{BA}} = \overline{BO} - \overline{AO} = k - \overline{AO} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}\,\ell - \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\,\ell = \left(\frac{\sqrt{5+2\sqrt{3}}}{2} - \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\right)\ell =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2} - \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\right)^2} \times \ell = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{4} + \frac{5+\sqrt{5}}{8} - 2 \times \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2} \times \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{10+4\sqrt{5}+5+\sqrt{5}}{8} - \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{8}}} \times \ell = \sqrt{\frac{15+5\sqrt{5}}{8} - \sqrt{\frac{25+10\sqrt{5}+5\sqrt{5}+10}{8}}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{15+5\sqrt{5}}{8} - \sqrt{\frac{35+15\sqrt{5}}{8}}} \times \ell = \sqrt{\frac{15+5\sqrt{5}}{8} - \sqrt{\frac{5(7+3\sqrt{5})}{8}}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{15+5\sqrt{5}}{8} - \sqrt{\frac{5}{8}} \times \sqrt{7+3\sqrt{5}}} \times \ell = \sqrt{\frac{15+5\sqrt{5}}{8} - \sqrt{\frac{5}{8}} \times \left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{15+5\sqrt{5}}{8} - \sqrt{\frac{45}{16}} - \sqrt{\frac{25}{16}}} \times \ell = \sqrt{\frac{15+5\sqrt{5}}{8} - \frac{3\sqrt{5}}{4} - \frac{5}{4}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{15+5\sqrt{5}-6\sqrt{5}-10}{8}} \times \ell = \boxed{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \times \ell}$$

De la misma figura 2, se deduce también que

$$\boxed{\overline{BA}'} = \overline{BO} + \overline{AO} = k + \overline{AO} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}\ell + \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\,\ell =$$ (siguiendo los mismos pasos de $\overline{BA}$, con el cambio de signo de $-$ en $+$) =

$$= \sqrt{\frac{15+5\sqrt{5}}{8} + \frac{3\sqrt{5}}{4} + \frac{5}{4}} \times \ell = \sqrt{\frac{15+5\sqrt{5}+6\sqrt{5}+10}{8}} \times \ell = \boxed{\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{8}} \times \ell}$$

Con los resultados anteriores, podremos obtener los valores de "g_1", "g_2" y "g_3", que serán respectivamente

$$\boxed{g_1} = \overline{BA} \times \cos\alpha = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \times \ell \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{5} \times \sqrt{\frac{5(5-\sqrt{5})}{8}} \times \ell = \sqrt{\frac{2^2 \times 5(5-\sqrt{5})}{5^2 \times 8}}\,\ell =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times \ell} = 0,52\,57\,31\,1 \ldots \ell$$

Para el caso del dibujo, será: $g_1 = 0,52\,57\,31\,1 \ldots \times 18,5 = 9,7$ mm

$$\boxed{g_2} = \overline{BO} \times \cos\alpha = k \cdot \cos\alpha = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}\,\ell \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2 \times \sqrt{25+10\sqrt{5}}}{10}\,\ell =$$

$$= \frac{\sqrt{5\cdot(5+2\sqrt{5})}}{5}\,\ell = \boxed{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \times \ell} = 1,37\,63\,82\,0 \ldots \ell = 9,7 \text{ mm}$$

$$\boxed{g_3} = \overline{BA'} \times \cos\alpha = \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{8}} \times \frac{2\sqrt{5}}{5}\,\ell = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{125+55\sqrt{5}}{8}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{4 \times 5 \times (25+11\sqrt{5})}{5^2 \times 8}} \times \ell = \boxed{\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}} \times \ell} = 2,22\,70\,32\,73 \ldots \ell$$

Distancia "f_1" entre los dos planos paralelos a II, que contienen los vértices 11 al 15 y 46 al 50 respectivamente.

Se obtiene por diferencia de las alturas "c_{10}" y "g_1", ya calculadas.

$$\boxed{f_1} = 2\,(c_{10} - g_1) = 2 \times \left(\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{8}}\, l - \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, l\right) =$$

$$= 2\left(\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{8}} - \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right) \times l = 2 \times \sqrt{\left(\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{8}} - \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)^2} \times l =$$

$$= 2 \times \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{8} + \frac{5-\sqrt{5}}{10} - 2 \times \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{8}} \times \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}} \times l =$$

$$= 2 \times \sqrt{\frac{125+55\sqrt{5}+20-4\sqrt{5}}{40} - \sqrt{\frac{4\,(25+11\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{80}}} \times l =$$

$$= 2 \times \sqrt{\frac{145+51\sqrt{5}}{40} - \sqrt{\frac{125+55\sqrt{5}-25\sqrt{5}-55}{20}}} \times l = 2\sqrt{\frac{145+51\sqrt{5}}{40} - \sqrt{\frac{70+30\sqrt{5}}{20}}} \times l =$$

$$= 2 \times \sqrt{\frac{145+51\sqrt{5}}{40} - \frac{\sqrt{7+3\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}} \times l = 2 \times \sqrt{\frac{145+51\sqrt{5}}{40} - \left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}\right) : \sqrt{2}} \times l =$$

$$= 2 \times \sqrt{\frac{145+51\sqrt{5}}{40} - \sqrt{\frac{9}{4}} - \sqrt{\frac{5}{4}}} \times l = 2 \times \sqrt{\frac{145+51\sqrt{5}}{40} - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}} \times l =$$

$$= 2 \times \sqrt{\frac{145+51\sqrt{5}-60-20\sqrt{5}}{40}} \times l = \boxed{\sqrt{\frac{85+31\sqrt{5}}{10}} \times l} = 3{,}92\,83\,34\,35\ldots\, l$$

Para el caso del dibujo, será: $f_1 = 3{,}92\ 83\ 34\ 35\ldots \times 18{,}53 = 72{,}8$ mm

---

<u>Radio "r_1" de la circunferencia circunscrita al decágono regular de vértices 11 al 15 y 46 al 50.</u>

Este radio es un cateto de un triángulo rectángulo de hipotenusa "a" y el otro cateto "$\frac{f_1}{2}$". Su valor será:

$$\boxed{r_1} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{f_1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{37+15\sqrt5}{8}}\,l\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{85+31\sqrt5}{10}} \times l\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{37+15\sqrt5}{8} - \frac{1}{4} \times \frac{85+31\sqrt5}{10}} \times l = \sqrt{\frac{37+15\sqrt5}{8} - \frac{85+31\sqrt5}{40}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{185+75\sqrt5-85-31\sqrt5}{40}} \times l = \sqrt{\frac{100+44\sqrt5}{40}} \times l = \boxed{\sqrt{\frac{25+11\sqrt5}{10}} \times l} =$$

$$= 2,22\,70\,32\,73\ldots\, l$$

Para el caso del dibujo, será: $r_1 = 2,22\,70\,32\,73\ldots \times 18,53 = 41,2$ mm

---

<u>Distancia "g_2" de los vértices 16 al 20 al plano de la cara decagonal 1 al 10, y de los vértices 41 al 45 al de la cara decagonal 51 al 60</u>

Esta magnitud ha sido ya determinada en el cálculo de "g_1" (ver hoja 22); su valor es

$$\boxed{g_2 = \sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{5}}\, l} = 1,37\,63\,82\,0\ldots \times l$$

Para el caso del dibujo, será: $g_2 = 1,37\,63\,82\ldots \times 18.53 = 25,5$ mm

Distancia "f_2" entre los planos paralelos a II, que contienen los vértices 16 al 20 y 41 al 45 respectivamente.

Se obtiene por diferencia de las alturas "c_{10}" y "g_2", ya calculadas.

$$\boxed{f_2} = 2\left(c_{10} - g_2\right) = 2 \times \left(\sqrt{\frac{25+11\sqrt5}{8}} \times l - \sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{5}} \times l\right) =$$

$$= 2 \times \left(\sqrt{\frac{25+11\sqrt5}{8}} - \sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{5}}\right) \times l = 2 \times \sqrt{\left(\sqrt{\frac{25+11\sqrt5}{8}} - \sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{5}}\right)^2} \times l =$$

$$= 2\sqrt{\frac{25+11\sqrt5}{8} + \frac{5+2\sqrt5}{5} - 2\sqrt{\frac{(25+11\sqrt5)(5+2\sqrt5)}{40}}} \times l =$$

$$= 2\sqrt{\frac{125+55\sqrt5+40+16\sqrt5}{40} - 2\sqrt{\frac{125+55\sqrt5+50\sqrt5+110}{40}}} \times l =$$

$$= 2\sqrt{\frac{165+71\sqrt5}{40} - 2\sqrt{\frac{235+105\sqrt5}{40}}} \times l = 2\sqrt{\frac{165+71\sqrt5}{40} - 2\sqrt{\frac{47+21\sqrt5}{8}}} \times l =$$

$$= 2\sqrt{\frac{165+71\sqrt5}{40} - \sqrt{\frac{47+21\sqrt5}{2}}} \times l = 2\sqrt{\frac{165+71\sqrt5}{40} - \frac{1}{\sqrt2} \times \sqrt{47+21\sqrt5}} \times l =$$

$$= 2\sqrt{\frac{165+71\sqrt5}{40} - \frac{1}{\sqrt2} \times \left(\sqrt{\frac{49}{2}} + \sqrt{\frac{45}{2}}\right)} \times l = 2\sqrt{\frac{165+71\sqrt5}{40} - \sqrt{\frac{49}{4}} - \sqrt{\frac{45}{4}}} \times l =$$

$$= 2\sqrt{\frac{165+71\sqrt5}{40} - \frac{7}{2} - \frac{3\sqrt5}{2}} \times l = 2\sqrt{\frac{165+71\sqrt5-140-60\sqrt5}{40}} \times l =$$

$$= 2\sqrt{\frac{25+11\sqrt5}{40}} \times l = \boxed{\sqrt{\frac{25+11\sqrt5}{10}}\, l} = 2{,}22\,70\,32\,73\ldots\, l$$

Para el caso del dibujo, será: $f_2 = 2{,}22\,70\,32\,73\ldots\, l = 41{,}2$ mm

Radio "r_2" de la circunferencia circunscrita al decágono regular de vértices 16 al 20 y 41 al 45

Este radio es un cateto del triángulo rectángulo de hipotenusa "a" y el otro cateto "$\frac{f_2}{2}$". Su valor será:

$$\boxed{r_2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{f_2}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{37+15\sqrt5}{8}}\times l\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt5}{10}}\,l\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{37+15\sqrt5}{8} - \frac{1}{4}\times\frac{25+11\sqrt5}{10}}\times l = \sqrt{\frac{37+15\sqrt5}{8} - \frac{25+11\sqrt5}{40}}\times l =$$

$$= \sqrt{\frac{185+75\sqrt5-25-11\sqrt5}{40}}\times l = \sqrt{\frac{160+64\sqrt5}{40}}\times l = \boxed{\sqrt{\frac{20+8\sqrt5}{5}}\times l} =$$

$$= 2,75\,27\,63\,84\ldots l$$

Para el caso del dibujo, será: $r_2 = 2,75\,27\,63\,84\ldots l \times 18,53 = 51,0$ mm

---

Distancia "g_3" de los vértices 21 al 30 al plano de la cara decagonal 1 al 10, y de los vértices 31 al 40 al de la cara decagonal 51 al 60

Esta magnitud ha sido ya determinada en el cálculo de "g_1" (ver hoja 22); su valor es

$$\boxed{g_3 = \sqrt{\frac{25+11\sqrt5}{10}}\times l} = 2,22\,70\,32\,73\ldots$$

Para el caso del dibujo, será: $g_3 = 2,22\,70\,32\,73\ldots \times 18,53 = 41,2$ mm

---

Distancia "f_3" entre los planos paralelos a II, que contienen los vértices 21 al 30 y 31 al 40 respectivamente.

Se obtiene por diferencias de las alturas "c_{10}" y "g_3", ya calculadas.

$$\boxed{f_3} = 2\,(c_{10} - g_3) = 2 \times \left(\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{8}} - \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}\right) \ell =$$

$$= 2 \times \sqrt{\left(\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{8}} - \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}\right)^2} \times \ell = 2 \times \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{8} + \frac{25+11\sqrt{5}}{10} - 2\sqrt{\frac{(25+11\sqrt{5})^2}{80}}} \times \ell =$$

$$= 2\sqrt{\frac{125+55\sqrt{5}+100+44\sqrt{5}}{40} - \frac{25+11\sqrt{5}}{\sqrt{20}}} \times \ell = 2 \times \sqrt{\frac{225+99\sqrt{5}}{40} - \frac{25+11\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}} \times \ell =$$

$$= 2 \times \sqrt{\frac{225+99\sqrt{5}}{40} - \frac{25\sqrt{5}+55}{10}} \times \ell = 2 \times \sqrt{\frac{225+99\sqrt{5}-100\sqrt{5}-220}{40}} \times \ell =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times \ell} = 0{,}52\;57\;31\;1\ldots \times \ell$$

Para el caso del dibujo, será: $f_3 = 0{,}52\;57\;31\;1\ldots \times 18{,}53 = 9{,}8$ mm

---

Radio "r_3" de la circunferencia circunscrita al polígono no regular de 20 lados, de vértices 21 al 30 y 31 al 40

Este radio es un cateto del triángulo rectángulo de hipotenusa "a" y el otro cateto "$\frac{f_3}{2}$". Su valor será:

$$\boxed{r_3} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{f_3}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{37+15\sqrt{5}}{8}}\,\ell\right)^2 - \left(\frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\,\ell\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{37+15\sqrt{5}}{8} - \frac{1}{4} \times \frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times \ell = \sqrt{\frac{37+15\sqrt{5}}{8} - \frac{5-\sqrt{5}}{40}} \times \ell = \sqrt{\frac{185+75\sqrt{5}-5-\sqrt{5}}{40}} \times \ell =$$

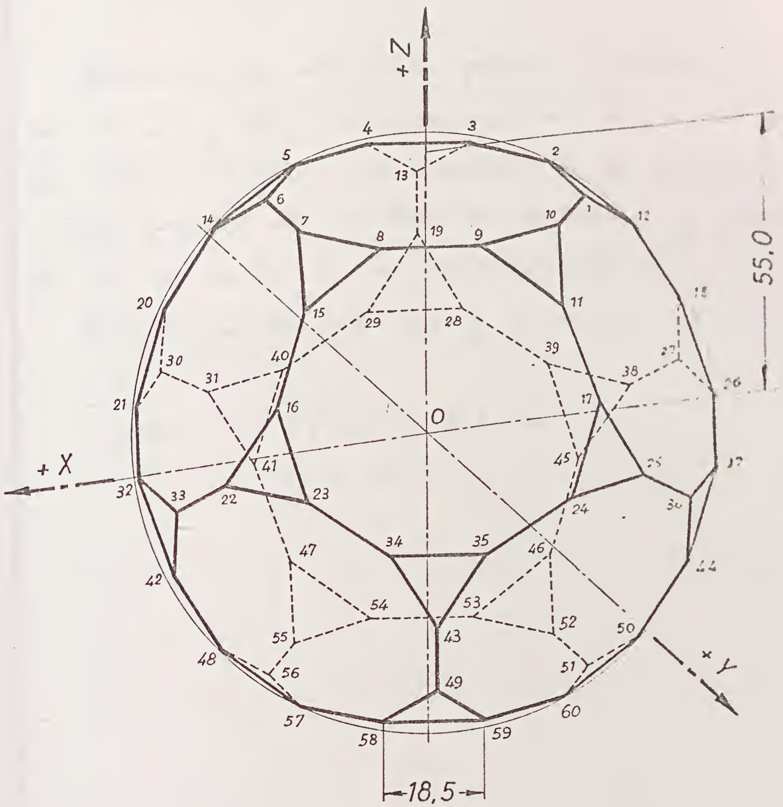
$$= \sqrt{\frac{180+74\sqrt{5}}{40}} \times \ell = \boxed{\sqrt{\frac{90+37\sqrt{5}}{20}} \times \ell} = 2,93\ 88\ 30\ 68\ldots\ \ell$$

Para el caso del dibujo, será $\underline{r_3 = 2,93\,88\,30\,68\ldots \times 18,53 = 54,5}$ mm.

En el cuadro sinóptico que damos a continuación, resumimos los resultados de los valores complementarios deducidos.

CUADRO SINÓPTICO DE LAS MAGNITUDES COMPLEMENTARIAS

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
n	$\frac{\sqrt{3}}{2}\ \ell$	$0,86\ 60\ 25\ldots\ \ell$
k	$\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}\ \ell$	$1,53\ 88\ 42\ldots\ \ell$
f_1	$\sqrt{\frac{85+31\sqrt{5}}{10}}\ \ell$	$3,92\ 83\ 34\ldots\ \ell$
f_2	$\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}\ \ell$	$2,22\ 70\ 33\ldots\ \ell$
f_3	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\ \ell$	$0,52\ 57\ 31\ldots\ \ell$
g_1	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\ \ell$	$0,52\ 57\ 31\ldots\ \ell$
g_2	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\ \ell$	$1,37\ 63\ 82\ldots\ \ell$
g_3	$\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}\ \ell$	$2,22\ 70\ 33\ldots\ \ell$
r_1	$\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}\ \ell$	$2,22\ 70\ 33\ldots\ \ell$
r_2	$\sqrt{\frac{20+8\sqrt{5}}{5}}\ \ell$	$2,75\ 27\ 64\ldots\ \ell$
r_3	$\sqrt{\frac{90+37\sqrt{5}}{20}}\ \ell$	$2,93\ 88\ 31\ldots\ \ell$
Relaciones notables:	$f_2 = g_3 = r_1$	$f_3 = g_1$



Arquimediano IX

Lámina 42	Poliedros arquimedianos Arquimediano X ($1\ P_4 + 2\ P_6$)	42

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el Arquimediano X, en el que en cada vértice concurren un cuadrado y dos exágonos regulares.

La longitud de su lado es de 34.8 mm, y las coordenadas de su centro O, son O(72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3V y a escala 1:1

DATOS $O\ (72,\ 72,\ 85)$ mm

$\ell_X = 34.8$ mm

34.79

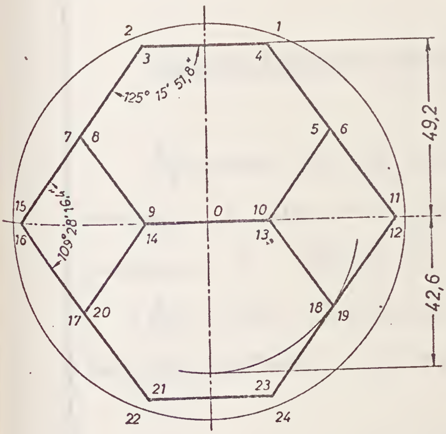
28 - 4 - 73

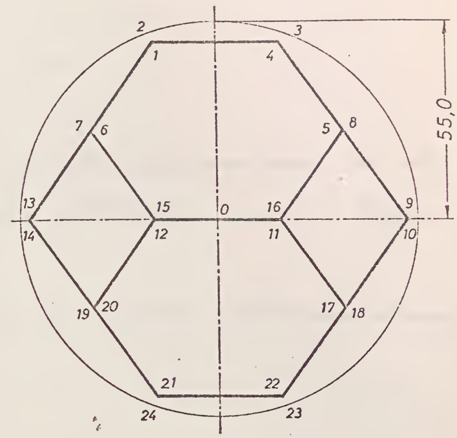
UNE A4 210 X 297

I

+Z

III

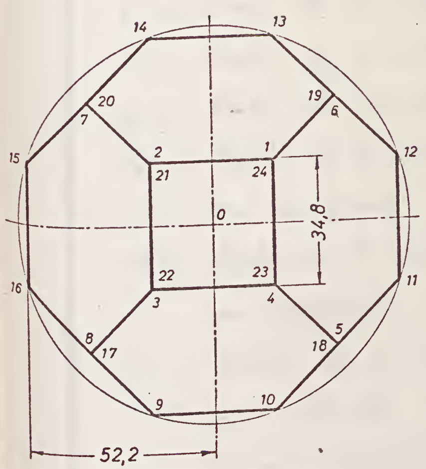




+X

O

+Y



ARQUIMEDIANO X

Número de caras cuadradas	C_4 = 6
Número de caras exagonales	C_6 = 8
Número de vértices	V = 24
Número de aristas	A = 36
Número de caras de un ángulo sólido	$1 P_4 + 2 P_6$

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico en los planos I, II y III, el Arquimediano X, en el que en cada vértice concurren un cuadrado y dos exágonos regulares.

La longitud de su lado es de 34,8 milímetros y las coordenadas de su centro O, son: O (72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

+Y

II

	Propuesta	De entrega	Entregada	Califi-cación	(firma)	Escuela / Curso
Fecha:						
Alumno:						
Escala 1:1	Arquimediano X					Lámina 42 / Curso 19 - 19

CONSIDERACIONES PREVIAS

Seguiremos en el estudio de este arquimediano, las directrices y fórmulas generales planteadas en el "Arquimediano I", lámina 33.

En el caso particular que nos ocupa, determinaremos las magnitudes siguientes:

l = Arista del Arquimediano X (dato del ejercicio).

a = Radio de la esfera circunscrita

b = Radio de la esfera tangente a las aristas.

c_4 = Radio de la esfera tangente a las caras cuadradas.

c_6 = Radio de la esfera tangente a las caras exagonales.

d_4 = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara cuadrada.

d_6 = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara exagonal.

m = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las aristas de un ángulo sólido.

α_4 = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara cuadrada, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.

α_6 = Angulo rectilíneo del diedro formado por una

cara exagonal, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.

φ_{4-6} = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara triangular y otra octogonal.

φ_{6-6} = Angulo rectilíneo del diedro formado por dos caras exagonales.

S = Superficie

V = Volumen

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

El estudio realizado de este arquimediano, nos indica que se compone de 6 caras cuadradas y 8 caras exagonales; 24 vértices y 36 aristas.

En cada vértice concurren un cuadrado y dos exágonos regulares.

Así pues, tendremos que:

$$\boxed{\text{ARQUIMEDIANO X } (1\,P_4 + 2\,P_6);\quad C_4 = 6;\quad C_6 = 8;\quad V = 24;\quad A = 36}$$

Cálculo de sus magnitudes

Arista "l" del arquimediano

Dato del ejercicio

Lámina 42	Poliedros arquimedianos Arquimediano X	Hoja nº 3

<u>Radio "m" de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las tres aristas que concurren en un ángulo sólido.</u>

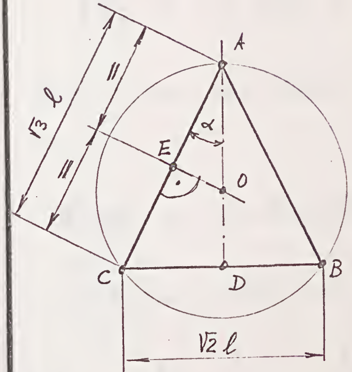


Figura 1

Dicho polígono (fig. 1), es un triángulo isósceles, cuya base $\overline{BC}$ es la diagonal de una cara cuadrada, y sus otros dos lados iguales $AC = AB$, corresponden a la diagonal de una cara exagonal.

Se demuestra en Geometría que la diagonal de un cuadrado de lado "ℓ", es

$$\overline{CB} = \sqrt{2}\,\ell$$

y la de un exágono regular, también de lado "ℓ", es

$$\overline{AC} = \overline{AB} = \sqrt{3}\,\ell$$

De la figura se deduce:

$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2} = \sqrt{(\sqrt{3}\,\ell)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\ell\right)^2} = \sqrt{3 - \tfrac{1}{2}} \times \ell = \sqrt{\tfrac{5}{2}} \times \ell$$

por lo que será:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}\,\ell}{\sqrt{3}\,\ell} = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

y en consecuencia:

$$AO = \boxed{m} = \frac{\overline{AE}}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ell : \sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{1}{2}\sqrt{3 : \frac{5}{6}} \times \ell = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{18}{5}} \times \ell =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}\, \ell = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{10}{25}}\, \ell = \boxed{\frac{3\sqrt{10}}{10}\, \ell} = 0{,}94\ 86\ 83\ 30 \ldots \ell$$

Para el caso del dibujo, será: $m = 0{,}94\ 86\ 83\ 3 \ldots \times 34{,}79 = 33{,}0$ mm

---

Radio "a" de la esfera circunscrita

Se obtiene aplicando la fórmula general [1] (ver lám. 33)

$$\boxed{a} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - m^2}} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - \left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\ell\right)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{90}{100}}}\, \ell = \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{9}{10}}} \times \ell =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{10}}} \times \ell = \frac{1}{2}\sqrt{10}\, \ell = \boxed{\frac{\sqrt{10}}{2}\, \ell} = 1{,}58\ 11\ 38\ 83 \ldots \ell$$

Para el caso del dibujo, será: $a = 55$ mm $\quad \ell = 34{,}79$ mm

---

Radio "b" de la esfera tangente a las aristas

Se obtiene aplicando la fórmula general [3] (ver lám. 33)

$$\boxed{b} = \sqrt{a^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\ell\right)^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4} - \frac{1}{4}}\, \ell = \sqrt{\frac{9}{4}} \times \ell = \boxed{\frac{3}{2}\, \ell} =$$

$$= 1{,}5 \times \ell$$

Para el caso del dibujo, será: $b = 1{,}5 \times 34{,}79 = 52{,}2$ mm

---

<u>Radio "d_4" de la circunferencia circunscrita a una cara cuadrada de lado "l"</u>

Se demuestra en Geometría, es

$$\boxed{d_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}\, l} = 0,70\ 71\ 06\ 78 \ldots l$$

Para el caso del dibujo, será: $d_4 = 0,70\ 71\ 06\ 78 \ldots \times 34,79 = 24,6$ mm

---

<u>Radio "d_6" de la circunferencia circunscrita a una cara exagonal de lado "l"</u>

Se demuestra en Geometría, es

$$\boxed{d_6 = l}$$

<u>Radio "c_4" de la esfera tangente a las caras cuadradas de lado "l"</u>

Se obtiene aplicando la fórmula general [2] (ver lám. 33)

$$\boxed{c_4} = \sqrt{a^2 - (d_4)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\, l\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\, l\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{4} - \frac{2}{4}} \times l = \sqrt{\frac{8}{4}} \times l =$$

$$= \boxed{\sqrt{2}\ l} = 1,41\ 42\ 13\ 56 \ldots l$$

Para el caso del dibujo, será: $c_4 = 1,41\ 42\ 13\ 56 \ldots \times 34,79 = 49,2$ mm

---

Radio "c_6" de la esfera tangente a las caras exagonales de lado "l"

Aplicando la fórmula general [2] (ver lám. 33)

$$\boxed{c_6} = \sqrt{a^2-(d_6)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{10}}{2}l\right)^2 - l^2} = \sqrt{\frac{10}{4}-1} \times l = \sqrt{\frac{5}{2}-1} \times l = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot l =$$

$$= \sqrt{\frac{6}{4}} \times l = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{2}\ l} = 1,22\ 47\ 44\ 87 \ldots l$$

Para el caso del dibujo, será

$c_6 = 1,22\ 47\ 44\ 87 \ldots \times 34,79 = 42,6$ mm.

Angulo rectilíneo "α_4" del diedro formado por una cara cuadrada, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.

Se obtiene, en función de su tangente, por la fórmula general [5] (ver lám. 33).

$$\boxed{tg\ \alpha_4} = \frac{2\ c_4}{\sqrt{4\ (d_4)^2 - l^2}} = \frac{2\sqrt{2}\ l}{\sqrt{4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}l\right)^2 - l^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4 \times \frac{1}{2} - 1}} =$$

$$= \boxed{2\sqrt{2}} = 2,82\ 84\ 27\ 12 \ldots$$

$\lg\ tg\ \alpha_4 = 0,45\ 15\ 45\ 0$ $\boxed{\alpha_4 = 70°\ 31'\ 43,6''}$

Angulo rectilíneo "α_6" del diedro formado por una cara exagonal, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla

Se obtiene, en función de su tangente, por la fórmula general [6] (ver lám. 33)

$$\boxed{tg\ \alpha_6} = \frac{2\, c_6}{\sqrt{4\,(d_6)^2 - \ell^2}} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{6}}{2}\,\ell}{\sqrt{4\ell^2 - \ell^2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} = 1,41\,42\,13\,56\ldots$$

$lg\ tg\ \alpha_6 = 0,15\,05\,15\,0$ $\qquad \boxed{\alpha_6 = 54^\circ\ 44'\ 8,2''}$

<u>Angulo rectilíneo "φ_{4-6}" del diedro formado por una cara cuadrada y otra exagonal regular</u>

Aplicando la fórmula general [4] (ver lám. 33)

$$\boxed{\varphi_{4-6}} = \alpha_4 + \alpha_6 = 70^\circ\ 31'\ 43,6'' + 54^\circ\ 44'\ 8,2'' =$$

$$= \boxed{125^\circ\ 15'\ 51,8''}$$

También puede obtenerse directamente, así:

$$\boxed{tg\ \varphi_{4-6}} = tg\,(\alpha_4 + \alpha_6) = \frac{tg\ \alpha_4 + tg\ \alpha_6}{1 - tg\ \alpha_4 \times tg\ \alpha_6} = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{2}}{1 - 2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{1-4} =$$

$$= -\frac{3\sqrt{2}}{3} = \boxed{-\sqrt{2}}$$ y haciendo $\alpha_0 = \pi - \varphi_{4-6}$, será:

$tg\ \alpha_0 = -\ tg\ \varphi_{4-6} = -\left(-\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$ $\qquad lg\ tg\ \alpha_0 = 0,15\,05\,15\,0$

$\alpha_0 = 54^\circ\ 44'\ 8,2''$, por lo que será:

$$\boxed{\varphi_{4-6}} = 180^\circ - 54^\circ\ 44'\ 8,2'' = \boxed{125^\circ\ 15'\ 51,8''}$$

[illegible]

[illegible]

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

[illegible]

Angulo rectilíneo "φ_{6-6}" del diedro formado por dos caras exagonales regulares.

Aplicando la fórmula general [4] (ver lám. 33)

$$\boxed{\varphi_{6-6}} = \alpha_6 + \alpha_6 = 2\,\alpha_6 = 2 \times (54^\circ\ 44'\ 8{,}2'') =$$

$$= \boxed{109^\circ\ 28'\ 16{,}4''}$$

También puede obtenerse directamente así:

$$\boxed{tg\ \varphi_{6-6}} = tg\ 2\alpha_6 = \frac{2\ tg\ \alpha_6}{1 - tg^2\ \alpha_6} = \frac{2\sqrt{2}}{1-(\sqrt{2})^2} = \frac{2\sqrt{2}}{-1} = \boxed{-2\sqrt{2}}$$

y haciendo $\alpha_0 = \pi - \varphi_{6-6}$, será $tg\ \alpha_0 = -tg\ \varphi_{6-6} = -(-2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$

$$lg\ tg\ \alpha_0 = lg(2\sqrt{2}) = lg\ 2{,}82\ 84\ 27\ 12 \ldots = 0{,}45\ 15\ 45\ 0$$

$\alpha_0 = 70^\circ\ 31'\ 43{,}6''$ por lo que será:

$$\boxed{\varphi_{6-6}} = 180^\circ - 70^\circ\ 31'\ 43{,}6'' = \boxed{109^\circ\ 28'\ 16{,}4''}$$

Area lateral "S" del arquimediano

Se compone de la suma de 6 caras cuadradas y 8 exagonales regulares, todas de lado "l". La apotema de la cara exagonal, será:

$$\text{apotema} = \sqrt{(d_6)^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = \sqrt{\ell^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} \cdot \ell = \sqrt{\frac{3}{4}}\,\ell = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\ell$$

por lo que el área total, será:

$$\boxed{S} = 6 \times \ell^2 + 8 \times \frac{6}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\,\ell^2 = \left(6 + 12\sqrt{3}\right)\ell^2 = \boxed{6 \times \left(1 + 2\sqrt{3}\right)\ell^2} =$$

$$= 26{,}78\,46\,09\,72$$

<u>Volumen "V" del arquimediano</u>

Se compone de la suma de 6 pirámides regulares, de base cuadrada y altura "c_4", y de 8 pirámides escagonales regulares y altura "c_6". (lado "ℓ"). Su volumen será pues:

$$\boxed{V} = 6\,\ell^2 \times \frac{c_4}{3} + 12\sqrt{3}\,\ell^2 \times \frac{c_6}{3} = 2\,\ell^2 \times \sqrt{2}\,\ell + 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{6}}{2}\,\ell =$$

$$= \left(2\sqrt{2} + 2\sqrt{18}\right)\ell^3 = \left(2\sqrt{2} + 6\sqrt{2}\right)\ell^3 = \boxed{8\sqrt{2}\,\ell^3} = 11{,}31\,37\,08\,50\ldots\,\ell^3$$

<u>FIGURA CORPÓREA</u>

Se obtiene por acoplamiento de 6 cuadrados de lado $\ell = 34{,}8$ mm y 8 escágonos regulares de igual lado. El acoplamiento deberá hacerse de forma que en cada vértice concurran 2 escágonos y un cuadrado.

En el cuadro sinóptico que damos a continuación, se resumen los resultados analíticos obtenidos anteriormente.

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{\sqrt{10}}{2}\,\ell$	$1.58\ 11\ 39\ldots\ell$
b	$\frac{3}{2}\,\ell$	$1.50\ 00\ 00\ldots\ell$
C_4	$\sqrt{2}\,\ell$	$1,41\ 42\ 14\ldots\ell$
C_6	$\frac{\sqrt{6}}{2}\,\ell$	$1,22\ 47\ 45\ldots\ell$
d_4	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,\ell$	$0,70\ 71\ 07\ldots\ell$
d_6	$1\,\ell$	$1.00\ 00\ 00\ldots\ell$
m	$\frac{3\sqrt{10}}{10}\,\ell$	$0,94\ 86\ 83\ldots\ell$
α_4	$tg\ \alpha_4 = 2\sqrt{2}$	$tg\ \alpha_4 = 2,82\ 84\ 27\ldots$ $\alpha_4 = 70^\circ\ 31'\ 43,6''$
α_6	$tg\ \alpha_6 = \sqrt{2}$	$tg\ \alpha_6 = 1,41\ 42\ 14\ldots$ $\alpha_6 = 54^\circ\ 44'\ 8.2''$
φ_{4-6}	$tg\ \varphi_{4-6} = -\sqrt{2}$	$tg\ \varphi_{4-6} = -1,41\ 42\ 14$ $\varphi_{4-6} = 125^\circ\ 15'\ 51,8''$
φ_{6-6}	$tg\ \varphi_{6-6} = -2\sqrt{2}$	$tg\ \varphi_{6-6} = -2,82\ 84\ 27$ $\varphi_{6-6} = 109^\circ\ 28'\ 16.4''$
S	$6(1+2\sqrt{3})\,\ell^2$	$26,78\ 46\ 10\ldots\ell^2$
V	$8\sqrt{2}\,\ell^3$	$11,31\ 37\ 09\ldots\ell^3$

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

Después del cálculo de las magnitudes principales, vamos a proceder, en la lámina 42, a la representación gráfica del Arquimediano X.

Para su trazado nos valdremos de cotas calculadas por las fórmulas anteriores, y de procesos gráficos.

Con este objeto, calculemos previamente las siguientes magnitudes:

l_X = Dato del ejercicio = 34.8 mm

a = 1. 58 11 39... × 34.79 = 55,0 mm

b = 1. 5.......... × 34.79 = 52.2 mm

C_4 = 1, 41 42 14... × 34.79 = 49.2 mm

C_6 = 1, 22 47 45... × 34.79 = 42.6 mm

d_4 = 0. 70 71 07... × 34.79 = 24.6 mm

d_6 = 1............ × 34.79 = 34.8 mm

El orden de operaciones del trazado gráfico (lám. 42), es el siguiente:

1º Situar el centro 0, de coordenadas 0 (72. 72. 85) mm.

2º Dibujar en I, II y III las proyecciones de la esfera circunscrita, de radio a = 55.0 mm.

3º Representar en I, II y III las caras cuadradas superior 1 al 4 e inferior 21 al 24, supuesto el poliedro colocado con dichas caras paralelas a II, y un lado per-

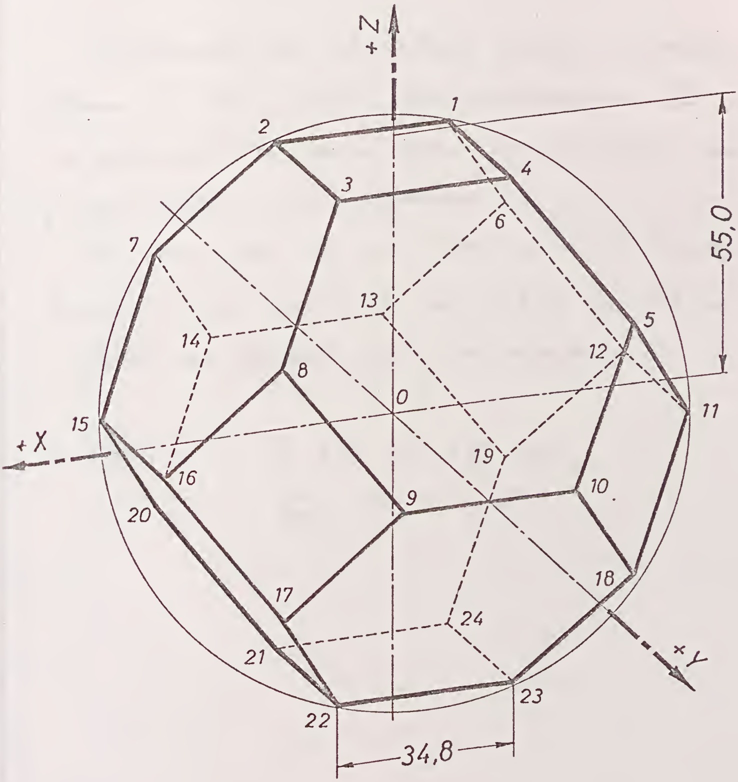
[illegible]

pendicuala a I (utilícese la cota "c_4" en I y III, y la "d_4" en II).

4° Representar en II las aristas 9-10, 11-12, 13-14 y 15-16, que son paralelas a II y de longitud "l"; los extremos de dichas aristas están en II sobre el contorno aparente de la esfera circunscrita de radio "a"; determinar seguidamente las proyecciones de ellas en I y III.

5° Completar el contorno aparente de la proyección II y trazar las aristas intermedias 1-6, 2-7, 3-8, 4-5, prolongaciones de las diagonales del cuadrado 1 al 4, que cortarán a las aristas 10-11, 12-13, 14-15, 16-9 en sus respectivos puntos medios. Con estos trazados queda completada la proyección en II

6° Completar las proyecciones I y III del arquimediano (son iguales), por correspondencia con los vértices de II: Compruébese que los vértices 5 al 8 y 17 al 20 distan de 0 la magnitud "$\frac{c_4}{2}$".



Arquimediano X

Lámina 43	Poliedros arquimedianos Arquimediano $\underline{XI}$ $(1P_4 + 1P_6 + 1P_8)$	43

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el arquimediano $\underline{XI}$, en el que en cada vértice concurren un cuadrado, un exágono y un octógono, todos regulares.

La longitud de su lado es de 23,7 mm, y las coordenadas de su centro O, son O(72, 72, 85) mm.

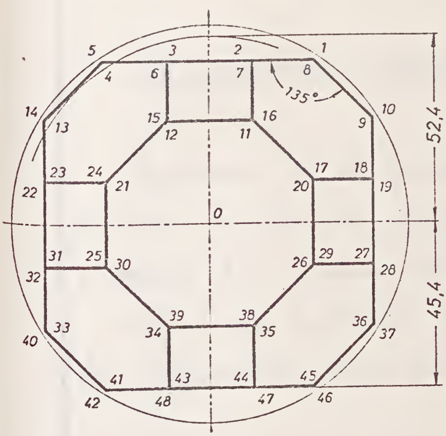
Dibar en formato A3V y a escala 1:1

DATOS $O\ (72,\ 72,\ 85)$ mm

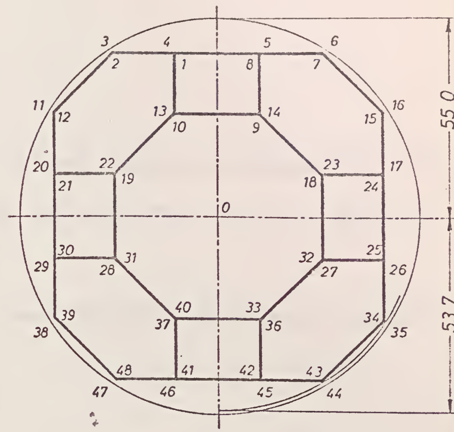
$l_{XI} = 23,7$ mm

[signature]		1-5-73

I

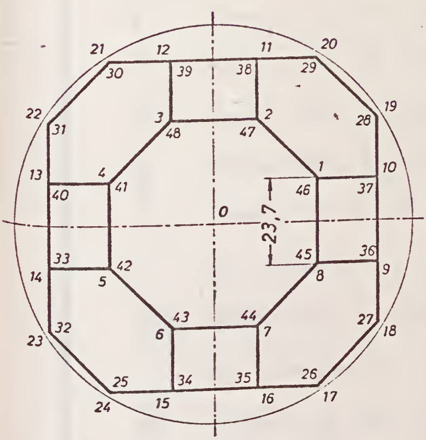


III



+Z

+X O +Y



II

+Y

ARQUIMEDIANO XI

Número de caras cuadradas	C_4	=	12
Número de caras exagonales	C_6	=	8
Número de caras octògonales	C_8	=	6
Número de vértices	V	=	48
Número de aristas	A	=	72
Número de caras de un ángulo sólido:	$1P_4 + 1P_6 + 1P_8$		

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el Arquimediano XI, en el que en cada cara concurren un cuadrado, un exágono y un octógono, todos regulares.

La longitud de su lado es de 23,7 milímetros y las coordenadas de su centro O, son: O (72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

	Propuesta	De entrega	Entregada	Califi-cación	(firma)	Escuela Curso
Fecha:						
Alumno:						
Escala 1:1	Arquimediano XI					Lámina 43 Curso 19 -19

CONSIDERACIONES PREVIAS

Seguiremos en el estudio de este arquimediano, las directrices y fórmulas generales planteadas en el "Arquimediano I", lámina 33.

En el caso particular que nos ocupa, determinaremos las magnitudes siguientes:

l = Arista del Arquimediano XI (dato del ejercicio).

a = Radio de la esfera circunscrita.

b = Radio de la esfera tangente a las aristas.

c_4 = Radio de la esfera tangente a las caras cuadradas

c_6 = Radio de la esfera tangente a las caras exagonales.

c_8 = Radio de la esfera tangente a las caras octogonales.

d_4 = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara cuadrada.

d_6 = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara exagonal

d_8 = Radio de la circunferencia circunscrita a una cara octogonal.

m = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las aristas de un ángulo sólido.

α_4 = Angulo rectilíneo del diedro formado por una

cara cuadrada, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.

α_6 = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara exagonal, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.

α_8 = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara octogonal, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.

$\varphi_{4\text{-}6}$ = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara cuadrada y otra exagonal.

$\varphi_{4\text{-}8}$ = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara cuadrada y otra octogonal

$\varphi_{6\text{-}8}$ = Angulo rectilíneo del diedro formado por una cara exagonal y otra octogonal.

S = Superficie

V = Volumen

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

El estudio realizado de este arquimediano, nos indica que se compone de 12 caras cuadradas, 8 caras exagonales y 6 caras octogonales; 48 vértices y 72 aristas.

En cada vértice concurren un cuadrado, un exágono y un octógono, todos regulares.

Así pues, tendremos que:

[illegible]

[illegible]

[illegible]

ARQUIMEDIANO XI $(1P_4 + 1P_6 + 1P_8)$; $C_4 = 12$; $C_6 = 8$; $C_8 = 6$; $V = 48$; $A = 72$

Cálculo de sus magnitudes

Arista "l" del arquimediano

Dato del ejercicio

Radio "m" de la circunferencia circunscrita al polígono obtenido al unir los extremos de las tres aristas que concurren en un ángulo sólido.

Este polígono es un triángulo A-B-C (fig. 1) escaleno, cuyos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ son respectivamente las diagonales que une tres vértices consecutivos en un cuadrado, un exágono y un octógono regulares, todos de lado "l".

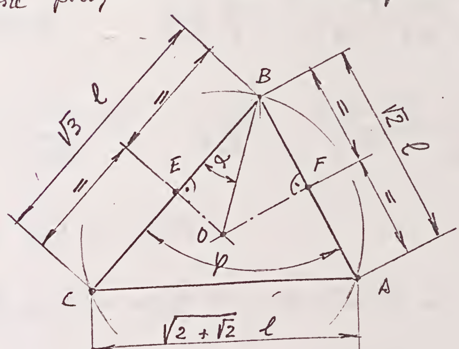


Figura 1

Se demuestra en Geometría que estas diagonales son:

a) En el cuadrado $AB = \sqrt{2}\ l$ [1]

b) En el exágono $BC = \sqrt{3}\ l$ [2]

c) En el octógono $\qquad AC = \sqrt{2+\sqrt{2}} \times l \qquad$ [3]

De la figura 1, se deduce:

$$\overline{BO} = \boxed{m = \frac{\overline{BE}}{\cos\alpha}} = \frac{\overline{BF}}{\cos(\varphi-\alpha)} \qquad [4]$$

de donde $\qquad \overline{BE} \times \cos(\varphi-\alpha) = \overline{BF} \times \cos\alpha \quad ''$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\, l \cos(\varphi-\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}\, l \cos\alpha \quad '' \qquad \sqrt{3}\cos(\varphi-\alpha) = \sqrt{2}\cos\alpha$$

$$\cos(\varphi-\alpha) = \sqrt{\frac{2}{3}} \times \cos\alpha \qquad [5]$$

por otra parte tenemos:

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BA}^2 - 2\times\overline{BC}\times\overline{BA}\times\cos\varphi \quad '' \quad \overline{BC}^2 + \overline{BA}^2 - \overline{AC}^2 = 2\times\overline{BC}\times\overline{BA}\times\cos\varphi$$

de donde $\qquad \boxed{\cos\varphi} = \dfrac{\overline{BC}^2 + \overline{BA}^2 - \overline{AC}^2}{2\times\overline{BC}\times\overline{BA}} = \dfrac{(\sqrt{3}\,l)^2 + (\sqrt{2}\,l)^2 - (\sqrt{2+\sqrt{2}}\,l)^2}{2\sqrt{3}\,l\times\sqrt{2}\,l} =$

$$= \frac{3+2-(2+\sqrt{2})}{2\sqrt{6}} = \frac{3-\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}-\sqrt{12}}{12} = \boxed{\frac{3\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{12}} \qquad [6]$$

0,3236

De [5] se deduce:

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\alpha = \cos(\varphi-\alpha) = \cos\varphi\cos\alpha + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\alpha \quad ''$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\alpha = \cos\varphi\cos\alpha + \sqrt{1-\cos^2\varphi}\times\sqrt{1-\cos^2\alpha} \quad ''$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\alpha - \cos\varphi\cos\alpha = \sqrt{(1-\cos^2\varphi)(1-\cos^2\alpha)} \quad ''$$

$$\left[\left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \cos\varphi\right)\cos\alpha\right]^2 = (1-\cos^2\varphi)(1-\cos^2\alpha) \quad ''$$

UNE A4 210 X 297

$$\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}} - \cos\varphi\right)^2 \cos^2\alpha = \left(1-\cos^2\varphi\right) - \left(1-\cos^2\varphi\right)\cos^2\alpha \quad ''$$

$$\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}} - \cos\varphi\right)^2 \cos^2\alpha + \left(1-\cos^2\varphi\right)\cos^2\alpha = 1-\cos^2\varphi \quad ''$$

$$\left[\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}} - \cos\varphi\right)^2 + \left(1-\cos^2\varphi\right)\right]\cos^2\alpha = 1-\cos^2\varphi \quad ''$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1-\cos^2\varphi}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \cos\varphi\right)^2 + \left(1-\cos^2\varphi\right)} = \frac{1-\cos^2\varphi}{\frac{2}{3} + \cos^2\varphi - 2\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\varphi + 1 - \cos^2\varphi} =$$

$$= \frac{1-\cos^2\varphi}{\frac{2}{3} + 1 - 2\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\varphi} = \frac{1-\cos^2\varphi}{\frac{5}{3} - 2\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\varphi}$$ y finalmente

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos^2\varphi}{\frac{5}{3} - 2\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\varphi}} \qquad [7]$$

valo que sustituido en [4], nos da

$$\boxed{m} = \frac{\overline{BE}}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,l : \sqrt{\frac{1-\cos^2\varphi}{\frac{5}{3} - 2\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\varphi}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 : \frac{1-\cos^2\varphi}{\frac{5}{3} - 2\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\varphi}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4} : \frac{1-\cos^2\varphi}{\frac{5}{3} - 2\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\varphi}} \times l = \sqrt{\frac{3\times\left(\frac{5}{3} - 2\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\varphi\right)}{4\left(1-\cos^2\varphi\right)}} \times l =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{5-6\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\varphi}{4\left(1-\cos^2\varphi\right)}} \times l} \qquad [8]$$

y teniendo en cuenta [6], el

numerador: $\underline{5-6\sqrt{\tfrac{2}{3}}\cos\varphi} = 5 - 6\sqrt{\tfrac{2}{3}} \times \dfrac{3\sqrt{6} - 2\sqrt{3}}{12} =$

$$= 5 - 6 \times \frac{\sqrt{2}\,(3\sqrt{6} - 2\sqrt{3})}{12\sqrt{3}} = 5 - \frac{3\sqrt{12} - 2\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = 5 - \frac{3\sqrt{36} - 2\sqrt{18}}{6} = 5 - \frac{18 - 6\sqrt{2}}{6} =$$

$$= 5 - \left(3 - \sqrt{2}\right) = \underline{2 + \sqrt{2}} \qquad [9]$$

y también el denominador

$$\underline{4\left(1 - \cos^2\varphi\right)} = 4\left[1 - \left(\frac{3\sqrt{6} - 2\sqrt{3}}{12}\right)^2\right] = 4 \times \left(1 - \frac{54 + 12 - 12\sqrt{18}}{144}\right) = 4\left(1 - \frac{66 - 36\sqrt{2}}{144}\right) =$$

$$= 4 \times \frac{144 - 66 + 36\sqrt{2}}{144} = 4 \times \frac{78 + 36\sqrt{2}}{144} = 4 \times \frac{13 + 6\sqrt{2}}{24} = \underline{\frac{13 + 6\sqrt{2}}{6}} \qquad [10]$$

sustituyendo los valores [9] y [10] en [8], tendremos finalmente

$$\boxed{m} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{\frac{13 + 6\sqrt{2}}{6}}}\,\ell = \sqrt{\frac{6\,(2 + \sqrt{2})}{13 + 6\sqrt{2}}}\,\ell = \sqrt{\frac{6\,(2 + \sqrt{2})(13 - 6\sqrt{2})}{13^2 - 72}} \times \ell$$

$$= \sqrt{\frac{6\,(26 + 13\sqrt{2} - 12\sqrt{2} - 12)}{97}}\,\ell = \boxed{\sqrt{\frac{6\,(14 + \sqrt{2})}{97}} \times \ell} = 0{,}97\,64\,50\,97\ldots\,\ell$$

para el caso del dibujo, será: $m = 0{,}97\,64\,50\,97\ldots x$

Radio "a" de la esfera circunscrita

Se obtiene aplicando la fórmula general [1] (ver lám. 33)

$$\boxed{a} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - m^2}} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - \left(\sqrt{\frac{6\,(14 + \sqrt{2})}{97}}\,\ell\right)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{6\,(14 + \sqrt{2})}{97}}} \times \ell =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{97 - 84 - 6\sqrt{2}}{97}}} \times \ell = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{97}{13 - 6\sqrt{2}}} \times \ell = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{97\,(13 + 6\sqrt{2})}{13^2 - 72}} \times \ell =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{97(13+6\sqrt{2})}{97}} \times l = \frac{1}{2}\sqrt{13+6\sqrt{2}}\ l. = \boxed{\frac{\sqrt{13+6\sqrt{2}}}{2}\ l} = 2{,}31\ 76\ 10\ 91\ldots\ l$$

Para el caso del dibujo, será: $a = 55$ mm $l = 23{,}73$ mm.

Radio "b" de la esfera tangente a las aristas

Se obtiene aplicando la fórmula general [3] (ver lám. 33)

$$\boxed{b} = \sqrt{a^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{13+6\sqrt{2}}}{2}\ l\right)^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{13+6\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{4}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{12+6\sqrt{2}}{4}}\ l = \boxed{\sqrt{\frac{6+3\sqrt{2}}{2}} \times l} = 2{,}26\ 30\ 33\ 44\ldots\ l$$

Para el caso del dibujo, será: $b = 2{,}26\ 30\ 33\ 44\ldots \times 23{,}73 = 53{,}7$ mm

---

Radio "d_4" de la circunferencia circunscrita a una cara cuadrada de lado "l".

Se demuestra en Geometría, es

$$\boxed{d_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}\ l} = 0{.}70\ 71\ 06\ 78\ldots\ l$$

Para el caso del dibujo, será: $d_4 = 0{.}70\ 71\ 06\ 78\ldots \times 23{,}73 = 16{,}8$ mm.

Radio "d_6" de la circunferencia circunscrita a una cara exagonal. de lado "l"

Se demuestra en Geometría, es: $\boxed{d_6 = l}$

Radio "d_8" de la circunferencia circunscrita a una cara octogonal de lado "l"

Se demuestra en Geometría, es

$$\boxed{d_8 = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} \times l} = 1,30\,65\,62\,96\ldots l$$

Para el caso del dibujo, será: $d_8 = 1,30\,65\,62\,96\ldots \times 23,73 = 31,0$ mm.

Radio "C_4" de la esfera tangente a las caras cuadradas de lado "l"

Aplicando la fórmula general [2] (ver lám. 33)

$$\boxed{C_4} = \sqrt{a^2-(d_4)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{13+6\sqrt{2}}}{2}\,l\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,l\right)^2} = \sqrt{\frac{13+6\sqrt{2}}{4} - \frac{2}{4}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{11+6\sqrt{2}}{4}}\,l = \frac{\sqrt{11+6\sqrt{2}}}{2}\,l = \frac{\sqrt{\frac{18}{2}} + \sqrt{\frac{4}{2}}}{2}\,l = \boxed{\frac{3+\sqrt{2}}{2}\,l} = 2,20\,71\,06\,78\ldots l$$

Para el caso del dibujo, será: $C_4 = 2,20\,71\,06\,78\ldots \times 23,73 = 52,4$ mm

Radio "C_6" de la esfera tangente a las caras exagonales de lado "l"

Aplicando la fórmula general [2] (ver lám. 33)

$$\boxed{C_6} = \sqrt{a^2-(d_6)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{13+6\sqrt{2}}}{2}\,l\right)^2 - l^2} = \sqrt{\frac{13+6\sqrt{2}}{4} - 1} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{9+6\sqrt{2}}{4}} \times l = \frac{\sqrt{9+6\sqrt{2}}}{2}\,l = \frac{\sqrt{\frac{12}{2}} + \sqrt{\frac{6}{2}}}{2} \times l = \boxed{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2} \times l} =$$

$= 2,09\ 07\ 70\ 25 \ldots l$

Para el caso del dibujo, será: $c_6 = 2,09\ 07\ 70\ 25 \ldots \times 23,73 = 49,6$ mm

---

Radio "c_8" de la esfera tangente a las caras octogonales de lado "l"

Aplicando la fórmula general [2] (ver lám. 33)

$$\boxed{c_8} = \sqrt{a^2-(d_8)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{13+6\sqrt{2}}}{2}\,l\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}\,l\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{13+6\sqrt{2}}{4} - \frac{2+\sqrt{2}}{2}} \times l = \sqrt{\frac{13+6\sqrt{2}-4-2\sqrt{2}}{4}} \times l = \sqrt{\frac{9+4\sqrt{2}}{4}} \times l =$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{9+4\sqrt{2}}}{2} \times l} = 1,91\ 42\ 13\ 56 \ldots l = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{16}{2}} + \sqrt{\frac{2}{2}}\right) l = \boxed{\frac{2\sqrt{2}+1}{2}\, l}$$

Para el caso del dibujo, será: $c_8 = 1,91\ 42\ 13\ 56 \ldots \times 23,73 = 45,4$ mm.

Angulo rectilíneo "α_4" del diedro formado por una cara cuadrada, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.

Se obtiene, en función de su tangente, por la fórmula general [5]. (ver lám. 33)

$$\boxed{tg\ \alpha_4} = \frac{2\,c_4}{\sqrt{4(d_4)^2 - l^2}} = \frac{2 \times \frac{3+\sqrt{2}}{2}\, l}{\sqrt{4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\, l\right)^2 - l^2}} = \frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{4 \times \frac{1}{2} - 1}} = 3 + \sqrt{2} =$$

$= 4,41\ 42\ 13\ 56 \ldots$

$lg\ tg\ \alpha_4 = 0,64\ 48\ 53\ 3$ $\qquad \boxed{\alpha_4 = 77^\circ\ 14'\ 8,2''}$

Angulo rectilíneo "α_6" del diedro formado por una cara exagonal, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.

Se obtiene, en función de su tangente, por la fórmula general [5] (ver lám. 33).

$$\boxed{tg\ \alpha_6} = \frac{2\ c_6}{\sqrt{4\,(d_6)^2 - \ell^2}} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2}\ell}{\sqrt{4\ \ell^2 - \ell^2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{18}+3}{3} =$$

$$= \frac{3\sqrt{2}+3}{3} = \boxed{1+\sqrt{2}} = 2,41\ 42\ 13\ 56\ldots$$

$$lg\ tg\ \alpha_6 = 0,38\ 2\ 7\ 7\ 56 \qquad \boxed{\alpha_6 = 67^\circ\ 30'\ 0{,}0''}$$

Angulo rectilíneo "α_8" del diedro formado por una cara octogonal, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquélla.

Se obtiene, en función de su tangente, por la fórmula general [5] (ver lám. 33)

$$\boxed{tg\ \alpha_8} = \frac{2\ c_8}{\sqrt{4\,(d_8)^2 - \ell^2}} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{9+4\sqrt{2}}}{2} \times \ell}{\sqrt{4\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}\ \ell\right)^2 - \ell^2}} = \frac{\sqrt{9+4\sqrt{2}}}{\sqrt{4 \times \frac{2+\sqrt{2}}{2} - 1}} =$$

$$= \frac{\sqrt{9+4\sqrt{2}}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}-1}} = \frac{\sqrt{9+4\sqrt{2}}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{9+4\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(9+4\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}{9-8}} =$$

$$= \sqrt{27+12\sqrt{2}-18\sqrt{2}-16} = \boxed{\sqrt{11-6\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{18}{2}} - \sqrt{\frac{4}{2}} = \boxed{3-\sqrt{2}} = 1,58\ 57\ 86\ 44\ldots$$

$$\lg \operatorname{tg} \alpha_8 = 0{,}2002447 \qquad \boxed{\alpha_8 = 57^\circ\ 45'\ 51{,}8''}$$

Angulo rectilíneo "φ_{4-6}" del diedro formado por una cara cuadrada y otra exagonal regular.

Aplicando la fórmula general [4] (ver lám. 33)

$$\boxed{\varphi_{4-6}} = \alpha_4 + \alpha_6 = 77^\circ\ 14'\ 8{,}2'' + 67^\circ\ 30'\ 0{,}0'' =$$

$$= \boxed{144^\circ\ 44'\ 8{,}2''}$$

También puede obtenerse directamente, así:

$$\operatorname{tg} \varphi_{4-6} = \operatorname{tg}(\alpha_4 + \alpha_6) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_4 + \operatorname{tg}\alpha_6}{1 - \operatorname{tg}\alpha_4 \times \operatorname{tg}\alpha_6} = \frac{(3+\sqrt{2}) + (1+\sqrt{2})}{1-(3+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{4+2\sqrt{2}}{1-(3+\sqrt{2}+3\sqrt{2}+2)} = \frac{4+2\sqrt{2}}{1-5-4\sqrt{2}} = -\frac{4+2\sqrt{2}}{4+4\sqrt{2}} = -\frac{2+\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}} =$$

$$= -\frac{(2+\sqrt{2})(2\sqrt{2}-2)}{8-4} = -\frac{4\sqrt{2}+4-4-2\sqrt{2}}{4} = -\frac{2\sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

y haciendo $\alpha_0 = \pi - \varphi_{4-6}$, será: $\operatorname{tg}\alpha_0 = -\operatorname{tg}\varphi_{4-6} =$

$$= -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7071 0678 \qquad \lg \operatorname{tg} \alpha_0 = \bar{1}{,}8494850$$

$\alpha_0 = 35^\circ\ 15'\ 51{,}8''$, por lo que será:

$$\varphi_{4-6} = 180^\circ - 35^\circ\ 15'\ 51{,}8'' = \boxed{144^\circ\ 44'\ 8{,}2''}$$

valor coincidente con el calculado anteriormente

Angulo rectilíneo "φ_{4-8}" del diedro formado por una cara cuadrada y otra octogonal

Aplicando la fórmula general [4] (ver lám. 33)

$$\boxed{\varphi_{4-8}} = \alpha_4 + \alpha_8 = 77^\circ\ 14'\ 8.2'' + 57^\circ\ 45'\ 51,8'' = \boxed{135^\circ}$$

También puede obtenerse directamente, así:

$$\boxed{tg\ \varphi_{4-8}} = tg\left(\alpha_4 + \alpha_8\right) = \frac{tg\ \alpha_4 + tg\ \alpha_8}{1 - tg\ \alpha \times tg\ \alpha_8} = \frac{(3+\sqrt{2}) + (3-\sqrt{2})}{1-(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{6}{1-7} = -\frac{6}{6} = \boxed{-1}$$ y haciendo $\alpha_0 = \pi - \varphi_{4-8}$, será:

$$tg\ \alpha_0 = -tg\ \varphi_{4-8} = -(-1) = 1 \qquad \alpha_0 = 45^\circ$$

$$\boxed{\varphi_{4-8}} = 180^\circ - 45^\circ = \boxed{135^\circ}$$

valor coincidente con el calculado anteriormente.

Angulo rectilíneo "φ_{6-8}" del diedro formado por una cara exagonal y otra octogonal

Aplicando la fórmula general [4] (ver lám. 33)

$$\boxed{\varphi_{6-8}} = \alpha_6 + \alpha_8 = 67^\circ\ 30' + 57^\circ\ 45'\ 51,8'' =$$
$$= \boxed{125^\circ\ 15'\ 51.8''}$$

También puede obtenerse directamente, así:

$$\boxed{tg\ \varphi_{6-8}} = tg\left(\alpha_6 + \alpha_8\right) = \frac{tg\,\alpha_6 + tg\,\alpha_8}{1 - tg\,\alpha_6 \times tg\,\alpha_8} = \frac{(1+\sqrt{2})\ (3-\sqrt{2})}{1-(1+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{4}{1-(3+3\sqrt{2}-\sqrt{2}-2)} = \frac{4}{1-(1+2\sqrt{2})} = -\frac{4}{2\sqrt{2}} = \boxed{-\sqrt{2}}$$

y haciendo $\alpha_0 = \pi - \varphi_{6-8}$, será: $tg\,\alpha_0 = -tg\,\varphi_{6-8} = -(-\sqrt{2}) = \sqrt{2} =$

$= 1{,}41\ 42\ 13\ 56 \dots$ $\qquad$ $lg\ tg\,\alpha = 0{,}15\ 05\ 15\ 0$

$\alpha_0 = 54^0\ 44'\ 8{,}2''$, por lo que será:

$$\boxed{\varphi_{6-8}} = 180^\circ - 54^0\ 44'\ 8{,}2'' = \boxed{125^\circ\ 15'\ 51{,}8''}$$

Area lateral "S" del arquimediano.

Se compone de la suma de 12 caras cuadradas, 8 exagonales y 6 octogonales, todas de lado "l".

La apotema de la cara exagonal, será: (ver lám. 42, h 9)

$$\text{apotema } P_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}\, l$$

La apotema de la cara octogonal, será: (ver lám. 40, h 9)

$$\text{apotema } P_8 = \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{2}\, l$$

y el área lateral S

$$\boxed{S} = 12\, l^2 + 8 \times \frac{6}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\, l^2 + 6 \times \frac{8}{2} \times \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{2}\, l^2 =$$

$$= \left(12 + 12\sqrt{3} + 12\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right) \ell^2 = 12\left(1 + \sqrt{3} + \sqrt{\frac{4}{2}} + \sqrt{\frac{2}{2}}\right)\ell^2 =$$

$$= 12\left(1 + \sqrt{3} + \sqrt{2} + 1\right)\ell^2 = \boxed{12\left(2 + \sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\ell^2} = 61,75\,51\,72\,44\ldots\,\ell^2$$

Volumen "V" del arquimediano

Se compone de la suma de 12 pirámides regulares de base cuadrada y altura "c_4"; de 8 pirámides exagonales de altura "c_6" y de 6 octogonales, de altura c_8. Su volumen será pues:

$$\boxed{V} = 12\,\ell^2 \times \left(\frac{3+\sqrt{2}}{2} : 3\right)\ell + 12\sqrt{3}\,\ell^2\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2} : 3\right)\ell + 12\left(\sqrt{2}+1\right)\ell^2\left(\frac{2\sqrt{2}+1}{6}\right)\ell =$$

$$= \left[2\left(3+\sqrt{2}\right) + 2\sqrt{3}\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right) + 2\left(\sqrt{2}+1\right)\left(2\sqrt{2}+1\right)\right]\ell^3 =$$

$$= \left(6 + 2\sqrt{2} + 2 \times 3\sqrt{2} + 6 + 2\left(4 + 2\sqrt{2} + \sqrt{2} + 1\right)\right)\ell^3 =$$

$$= \left(6 + 2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 6 + 10 + 6\sqrt{2}\right)\ell^3 = \left(22 + 14\sqrt{2}\right)\ell^3 =$$

$$= \boxed{2\left(11 + 7\sqrt{2}\right)\ell^3} = 41,79\,89\,89\,85\ldots\,\ell^3$$

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de 12 cuadrados de lado $\ell = 23,7$ mm; de 8 exágonos y 6 octógonos, también

UNE A4 210 X 297

regulares y de igual lado. El acoplamiento deberá hacerse de forma que en cada vértice concurran un cuadrado, un exágono y un octógono.

En el cuadro sinóptico que damos a continuación, resumimos los resultados analíticos obtenidos anteriormente.

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{\sqrt{13+6\sqrt{2}}}{2}\,\ell$	$2.31\ 76\ 11\ldots\ell$
b	$\sqrt{\frac{6+3\sqrt{2}}{2}}\,\ell$	$2.26\ 30\ 33\ldots\ell$
c_4	$\frac{3+\sqrt{2}}{2}\,\ell$	$2.20\ 71\ 07\ldots\ell$
c_6	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2}\,\ell$	$2.09\ 07\ 70\ldots\ell$
c_8	$\frac{2\sqrt{2}+1}{2}\,\ell$	$1.91\ 42\ 14\ldots\ell$
d_4	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,\ell$	$0.70\ 71\ 07\ldots\ell$
d_6	$1\ \ell$	$1.00\ 00\ 00\ldots\ell$
d_8	$\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}\,\ell$	$1.30\ 65\ 63\ldots\ell$
m	$\sqrt{\frac{6(14+\sqrt{2})}{97}}\,\ell$	$0.97\ 64\ 51\ldots\ell$
α_4	$tg\ \alpha_4 = 3+\sqrt{2}$	$tg\ \alpha_4 = 4.41\ 42\ 14\ldots$ $\alpha_4 = 77^\circ\ 14'\ 8.2''$
α_6	$tg\ \alpha_6 = 1+\sqrt{2}$	$tg\ \alpha_6 = 2.41\ 42\ 14\ldots$ $\alpha_6 = 67^\circ\ 30'\ 0.0''$
α_8	$tg\ \alpha_8 = 3-\sqrt{2}$	$tg\ \alpha_8 = 1.58\ 57\ 86\ldots$ $\alpha_8 = 57^\circ\ 45'\ 51.8''$
φ_{4-6}	$tg\ \varphi_{4-6} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$tg\ \varphi_{4-6} = -0.70\ 71\ 07$ $\varphi_{4-6} = 144^\circ\ 44'\ 8.2''$
φ_{4-8}	$tg\ \varphi_{4-8} = -1$	$\varphi_{4-8} = 135^\circ\ 0'\ 0.0''$
φ_{6-8}	$tg\ \varphi_{6-8} = -\sqrt{2}$	$tg\ \varphi_{6-8} = -1.41\ 42\ 14\ldots$ $\varphi_{6-8} = 125^\circ\ 15'\ 51.8''$
S	$12(2+\sqrt{2}+\sqrt{3})\,\ell^2$	$61.75\ 51\ 72\ldots\ell^2$
V	$2(11+7\sqrt{2})\,\ell^3$	$41.79\ 89\ 90\ldots\ell^3$

PROCESO GRÁFICO - ANALÍTICO

Después del cálculo de las magnitudes principales, vamos a proceder, en la lámina 43, a la representación gráfica del Arquimediano XI.

Para su trazado nos valdremos de cotas calculadas por las fórmulas anteriores, y de procesos gráficos.

Con este objeto, calculemos previamente las siguientes magnitudes:

$$\ell_{XI} = \text{Dato del ejercicio} = 23.7 \text{ mm}$$

$$a = 2,317611\ldots \times 23,73 = 55,0 \text{ mm}$$

$$b = 2,263033\ldots \times 23,73 = 53.7 \text{ mm}$$

$$c_4 = 2.207107\ldots \times 23,73 = 52,4 \text{ mm}$$

$$c_6 = 2,090770\ldots \times 23.73 = 49.6 \text{ mm}$$

$$c_8 = 1,914214\ldots \times 23,73 = 45,4 \text{ mm}$$

$$d_4 = 0,707107\ldots \times 23,73 = 16,8 \text{ mm}$$

$$d_6 = 1,000000\ldots \times 23,73 = 23.7 \text{ mm}$$

$$d_8 = 1,306563\ldots \times 23,73 = 31,0 \text{ mm}$$

El orde de operaciones del trazado gráfico (lám. 43) es el siguiente:

1º Situar el centro O, de coordenadas O(72, 72, 85) mm.

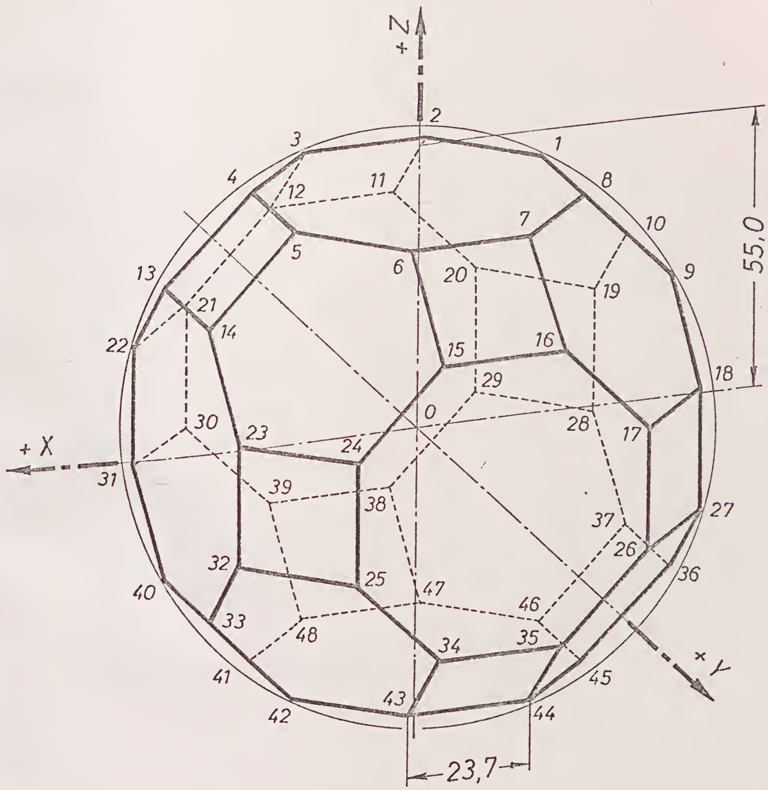
2º Dibujar, en I, II y III las proyecciones de la esfera circunscrita, de radio $a = 55$ mm.

3º Representar en I, II y III, las caras octogonales superior 1 al 8, e inferior 41 al 48, supuesto el poliedro colocado con dichas caras paralelas a II, y un lado perpendicular a I (utilícese la cota "c_4" en I y III, y la "d_4" en II).

4º Representar en I, II y III las caras octogonales anterior (15-24-25-34-35-26-17); posterior (12-21-30-39-38-29-20-11); lateral izquierda (13-22-31-40-33-32-23-14) y lateral derecha (10-19-28-37-36-27-18-9), siguiendo el mismo proceso que el dado en el anterior trazado 3º.

5º Completar las proyecciones en I, II y III de las aristas restantes (paralelas a los ejes principales o a sus bisectrices).

Obsérvese que por la posición elegida en la representación de este arquimediano, son iguales las proyecciones de sus tres vistas, aun cuando lógicamente es distinta la numeración de sus vértices.



Arquimediano XI